Álgebra

Efraín Soto Apolinar

Términos de uso

Soto Apolinar, Efraín.
Álgebra
Primera edición.
Incluye índice.
México. 2010.

El contenido de este libro corresponde al curso de Matemáticas para Bachillerato: Primer Semestre

Apreciado lector, usted puede sentirse libre de utilizar la información que se encuentra en este material, bajo las siguientes condiciones:

Atribución: Debe dar crédito al autor del libro, independientemente del medio que se utilice para su divulgación (impresa, electrónica, en línea, etc.)

Uso no comercial: No se permite el uso de este material ni de su contenido con fines comerciales y/o lucro en forma alguna. Puede utilizarlo con fines educativos o de divulgación de las ciencias. Se permite el uso por instituciones educativas públicas o privadas sin fines de lucro, con la condición de que no se aplique cargo, ni en especie ni en moneda, ni en cualquier otra forma, a los usuarios finales de este material, sean estos profesores, autoridades educativas, estudiantes o público en general interesado en la enseñanza y/o el aprendizaje de las matemáticas.

No Modificar: No se permite alterar, transformar, modificar, en forma alguna este material. Usted tiene permiso para utilizarlo «*como está y es*». No se permite ni agregar, ni eliminar, ni modificar: palabras, u oraciones, o párrafos, o páginas, o subsecciones, o secciones, o capítulos o combinaciones de las anteriores o parte alguna del libro.

Permisos: Puede contactar al autor de este material directamente a la cuenta de correo electrónico que aparece en los créditos. Si usted tiene una copia de este libro en formato PDF y desea publicarlo en algún sitio de Internet, primero solicite permiso al autor a través de un mensaje a la cuenta de correo electrónico que aparece en los créditos. No requiere de permiso alguno para imprimir una copia de este material para uso personal.

Responsabilidad: Ni el autor, ni el editor son responsables de cualquier pérdida o riesgo o daño (causal, incidental o cualquier otro), ocasionado debido al uso o interpretación de las definiciones que se incluyen en este diccionario.

Prefacio

El estudio de las matemáticas en el bachillerato impone nuevos retos, tanto para los profesores como para los alumnos.

El programa de estudio es extenso, esto ocasiona que la mayoría de las veces, los profesores no puedan detenerse a explicar con detalle por qué un procedimiento se debe realizar de la manera como se realiza, o presentar problemas retadores que motiven a los estudiantes a esforzarse más allá de lo que las condiciones del curso permiten.

En los ejemplos que se proveen en este material, se hace énfasis en que el estudiante comprenda por qué debe realizar un procedimiento, en lugar de dar prioridad a la mecanización de las operaciones. Se muestra en cada oportunidad que lo que ha entendido antes se está aplicando en una situación particular o que los conceptos anteriores le ayudan a justificar los procedimientos que está desarrollando para resolver un problema.

El autor ha notado que los estudiantes que utilizan menos frecuentemente la calculadora no solamente tienen mayor facilidad para realizar cálculos mentalmente, sino también para representar situaciones de distintas maneras y una mayor facilidad para justificar sus procedimientos de una manera aceptable. Por esto, se hace un esfuerzo por mostrar la forma de realizar cálculos sin necesidad de calculadora.

Se incluyen en cada capítulo algunos problemas en forma de reto para que el estudiante tenga la oportunidad de mejorar sus habilidades de resolución de problemas.

Las matemáticas cuentan con una gran interrelación entre sus conceptos y sus ramas. A lo largo del libro se muestran algunas interpretaciones geométricas para que el estudiante adquiera una visión más clara de lo que se está explicando a través de un diagrama. Esto puede ser de gran ayuda para aquellos estudiantes que tienen un aprendizaje más visual.

Este libro está inspirado en aquellos esudiantes que se quejan de no entender las matemáticas. Esto significa que aquella persona que lea cada tema presentado en este libro, y entienda cada argumento, al final del semestre debió adquirir una visión de las matemáticas diferente a la que tenía hasta entonces: ahora todo tendrá sentido, pues las matemáticas son muy lógicas. Espero que esta contribución ayude cada vez a más personas a adquirir el gusto por hacer matemáticas.

Este material puede servir como complemento para clase. El estudiante puede leer los ejemplos resueltos en este documento del sitio de Internet oficial de este libro y el profesor aprovechar el tiempo de clase mostrando más ejemplos. Profesor, intente que los ejemplos estudiados en clase estén en contextos variados para que el estudiante reconozca el beneficio de aplicar las matemáticas en la resolución de problemas cotidianos.

Efraín Soto Apolinar
Monterrey, N.L. México. 2010.

Índice de contenidos

Capítulo 1

Introducción al Álgebra

Por aprender...

Por qué es importante...

En el aprendizaje de cualquier ciencia, es importante concer la terminología con la que estamos hablando. El material que estudiaremos en esta unidad servirá de base para entender el álgebra.

1.1 Problemas Aritméticos

En esta sección vamos a estudiar primero los distintos conjuntos de números que se definen en matemáticas. Después, al conocerlos mejor, podremos resolver distintos problemas aritméticos.

Para simplificar el estudio de los números, los matemáticos los han clasificado de la siguiente manera:

Números naturales

Son los números que utilizamos para contar. El conjunto de los números naturales se denota por $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$$

Definición 1

Nótese que el cero no es un número natural, porque cuando alguien no posee nada, no tiene necesidad de contar.

En el lenguaje matemático, escribimos: $1 \in \mathbb{N}$ para indicar que el número 1 está dentro del conjunto de los números naturales, es decir, el número 1 es un elemento de ese conjunto.

El símbolo: $\in$ se lee: «*...es un elemento del conjunto...*»

Para indicar que un número dado NO es un numero natural escribimos, por ejemplo: $\pi \notin \mathbb{N}$. Esto nos está diciendo en palabras: «*El número* π *NO es un número natural*».

De manera semejante, el símbolo $\notin$ se lee: «*...no es un elemento del conjunto...*»

Es una buena idea notar que cuando sumamos dos números naturales, el resultado es otro número natural. Nunca obtendremos un número con decimales.

Comentario

Números enteros

Es el conjunto formado por todos los números naturales, el cero y los números naturales dotados del signo negativo. El conjunto de los números enteros se denota por $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

Definición 2

Es importante notar que todos los números naturales son también números enteros, pero no todos los números enteros son números naturales.

Por ejemplo, el número -5 es un número entero que no es un número natural.

De nuevo, cuando sumamos dos números enteros, el resultado es otro número entero.

Comentario

Números racionales

Es el conjunto formado por todos los números que pueden expresarse como el cociente de dos números enteros, siendo el denominador distinto de cero. El conjunto de los números racionales se denota por $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ x | x = \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Definición 3

Algunos ejemplos de números racionales son los siguientes:

$$\frac{1}{2} \qquad -\frac{3}{7} \qquad \frac{21}{22} \qquad \frac{7}{2} \qquad \frac{1}{10}$$

Pero no todas las fracciones se consideran números racionales. Para que un número sea considerado número racional, se requiere que tanto en el numerador como en el denominador tengamos un número entero, aunque sea negativo.

Por ejemplo, los siguientes números **no** son racionales, a pesar de que son fracciones:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad \frac{10}{0} \qquad \frac{\pi}{4}$$

Otra cosa importante consiste en que en el denominador no aparezca el cero. ¿Por qué?

Ya debes saber que no es posible dividir por cero.

Por ejemplo, cuando queremos dividir 10 entre cero, no podemos encontrar una solución.

Cuando dividimos cero entre diez, sí podemos encontrar una solución. Piensa en términos de manzanas: «*si tengo cero manzanas y las voy a repartir entre diez niños, ¿cuántas manzanas les daré a cada niño?*» La respuesta es obvia, como tengo cero manzanas, a cada niño le corresponden cero manzanas.

Pero el otro caso: «*si tengo diez manzanas y las voy a repartir entre cero niños, ¿cuántas manzanas les daré a cada niño?*», tenemos un problema: ¿cómo vamos a repartir las manzanas, si para empezar, tenemos cero niños?

Observa que cuando dividimos 10 entre 2, buscamos un número que multiplicado por 2, nos dé como resultado 5.

Cuando dividimos diez entre cero, tenemos que encontrar un número que multiplicado por cero nos dé como resultado diez. Pero ya sabemos que cualquier número multiplicado por cero es igual a cero. Esto significa que no podemos encontrar algún número que multiplicado por cero dé diez. Por eso no podemos realizar la división.

Otro caso aparte es la división cero entre cero. Si buscamos un número que multiplicado por cero nos dé como resultado cero, vemos que no hay solamente una solución, sino un número infinito de soluciones, todas distintas. Por ejemplo el número cero, bien sirve como solución de nuestra división, porque $0 \times 0 = 0$, pero igual sirve el número 1 como solución, porque $1 \times 0 = 0$, y así como cualquier número que se te ocurra.

El problema aquí consiste en que cuando dividimos un número entre otro, siempre obtenemos una única solución, pero en este único caso, al dividir cero sobre cero, no obtenemos una única solución, sino muchas.

Es importante mencionar que **no** es que la solución de esta división sea infinito, porque cuando dividimos dos números siempre obtenemos como resultado un único número. Infinito **no** es un número, sino una expresión que nos dice que algo no tiene fin. Por esta razón, no es correcto decir que al dividir entre cero obtenemos infinito como respuesta.

Observa que todos los números enteros son números racionales, porque podemos escribirlos con el denominador igual a 1. Por ejemplo, el número 10, puede representarse como:

$$10 = \frac{10}{1} \in \mathbb{Q}$$

y cumple con la definición de número racional, porque el denominador es distinto de cero.

Comentario	Igual que con los conjuntos de números naturales y enteros, en el conjunto de los números racionales, cuando sumamos dos de sus elementos, obtenemos otro elemento de $\mathbb{Q}$.

Definición 4

NÚMEROS IRRACIONALES

Son todos aquellos números que no se pueden escribir como el cociente de números enteros, siendo el denominador distinto de cero. El conjunto de los números racionales se denota por $\mathbb{Q}'$.

$$\mathbb{Q}' = \left\{ x | x \neq \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

Observa que ningún número racional es un número irracional y de manera semejante, ningún número irracional es un número racional.

Algunos ejemplos de números irracionales son:

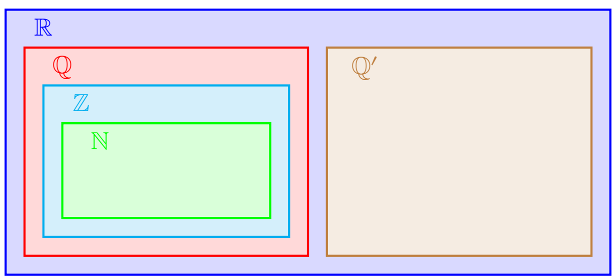
$$\pi, \quad \sqrt{2}, \quad \sqrt{3}, \quad \sqrt{6}, \cdots$$

Definición 5

NÚMEROS REALES

Es el conjunto que contiene a todos los números racionales y a todos los números irracionales.

El siguiente diagrama te ayudará a visualizar mejor cómo se relacionan los distintos conjuntos de números que hemos estudiado:



A partir de este diagrama podemos fácilmente darnos cuenta que todos los números naturales pertenecen al conjunto de los números enteros, es decir, todos los números naturales son también números enteros.

Pero todos los números enteros son también números racionales, por lo tanto, todos los números naturales también son números racionales.

Sin embargo, ningún número racional es un número irracional y viceversa. Esto nos indica que ningún número natural pertenece al conjunto de los números irracionales. Esto mismo ocurre con los números enteros.

Y es que si un número es racional no puede ser irracional.

Sin embargo, cuando juntamos a todos los números racionales con todos los números irracionales obtenemos el conjunto de los números reales. Es decir, todos los números que enlistamos (naturales, enteros, racionales e irracionales) son también números reales.

Ejemplo 1

Verifica si es verdadero o falso lo que se dice de los siguientes números.

- El número $\sqrt{9}$ es un número natural. V
- El número $\frac{\pi}{2}$ es un número racional. F
- El número 0 es un número irracional. F

- El número $\frac{1}{5}$ es un número entero. F
- El número $\frac{\sqrt{3}}{2}$ es un número racional. F
- El número π es un número real. V

Ejemplo 2

Indica en cada caso a qué conjunto debe pertenecer el número que utilizaremos en cada caso. Evidentemente, todos pertenecen al conjunto de los números reales, así que mejor menciona otro de los conjuntos.

- Volumen en mililitros de un vaso. $\mathbb{Q}$
- Área de un círculo de radio 1. $\mathbb{Q}'$
- Peso de una bolsa de frijol con una precisión de gramos. $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Q}$
- Número total de refrescos embotellados en un día en una embotelladora. $\mathbb{N}$
- Número total de hojas impresas en una fotocopiadora. $\mathbb{N}$
- Saldo de una cuenta bancaria, con una precisión de hasta centavos de peso. $\mathbb{Q}$
- Saldo de una cuenta bancaria, con una precisión de miles de pesos. $\mathbb{Z}$
- Velocidad de un coche. $\mathbb{Q}$

Comentario

Cuando sumamos dos números reales, cualesquiera que estos sean, el resultado es otro número real. De manera semejante, cuando multiplicamos dos números reales, el resultado es otro número real.

Definición 6

CERRADURA

Cuando a los elementos de un conjunto se les realiza una operación, y el resultado es algún elemento del mismo conjunto, decimos que ese conjunto es cerrado bajo esa operación.

Por ejemplo, los números naturales son cerrados bajo la suma, porque cuando sumamos dos números naturales obtenemos otro número natural.

De manera semejante, cuando multiplicamos dos números naturales, el resultado es otro número natural. Entonces el conjunto $\mathbb{N}$ también es cerrado bajo la multiplicación.

Enseguida se da la lista de las propiedades más básicas de los números reales. Si a, b, c son números reales, entonces:

Suma	Multiplicación	Propiedad
$a+b \in \mathbb{R}$	$a \cdot b \in \mathbb{R}$	Cerradura
$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$	Conmutativa
$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	Asociativa
$a+0=a$	$a \cdot 1 = a$	Neutro
$a+(-a)=0$	$a \cdot \frac{1}{a} = 1$	Inverso
$a(b+c)=ab+ac$		Distributiva

1.2 PROBLEMAS ARITMÉTICOS

En las matemáticas los números y los conjuntos son la base de toda la demás teoría.

Por eso es importante saber realizar las operaciones básicas con ellos: suma, resta, multiplicación y división, y resolver problemas prácticos con ellos.

Un triángulo tiene una base de 5.1 metros y una altura de 12.25 metros. ¿Cuál es su área? **Ejemplo 3**

- Ya sabemos la fórmula para calcular el área de un triángulo:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

- Ahora sustituimos los valores y realizamos las operaciones:

$$\begin{aligned} A &= \frac{b \cdot h}{2} \\ &= \frac{(5.1)(12.25)}{2} \\ &= \frac{62.475}{2} \\ &= 31.2375 \end{aligned}$$

- Es importante recordar que las unidades de área en este caso son los metros cuadrados.

- Entonces, el área del triángulo con una base de 5.1 metros de longitud y una altura de 12.25 metros de longitud es igual a 31.2375 metros cuadrados.

En la mayoría de los problemas cotidianos tenemos que trabajar con las unidades de los objetos con los que estamos trabajando.

Es muy importante recordar al final que las unidades son también parte de la solución.

Otra cosa muy importante es el orden en el cual debemos realizar las operaciones.

En el ejemplo anterior debíamos multiplicar y dividir. En realidad no importa qué operación realices primero, siempre obtenemos el mismo resultado.

Esto se debe a que dividir en realidad significa multiplicar. Por ejemplo, cuando vas a dividir por 2, obtienes el mismo resultado que si multiplicas por $\frac{1}{2}$, si quieres dividir por 3, obtienes lo mismo que si multiplicas por $\frac{1}{3}$, etc.

De manera semejante, sumar y restar son la misma operación. Si quieres restar 2 a un número, obtienes lo mismo que si sumas -2.

En la siguiente lista se muestran las operaciones indicando su prioridad.

Definición 7

PRIORIDAD DE LAS OPERACIONES

Las operaciones que aparecen al principio son las que debes realizar primero:

✓ ***Lo que aparezca entre paréntesis***, *por ejemplo, en la fórmula:*

$$L = L_0 \cdot (1 + \alpha)$$

primero debemos sumar lo que se indica entre paréntesis.

✓ ***Exponenciación y radicación***, *por ejemplo en la fórmula:*

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

primero debemos elevar al cuadrado la variable v.

✓ ***Multiplicación y división***, *por ejemplo, en la fórmula:*

$$y = 2x + 1$$

primero debemos multiplicar 2 por x y al resultado sumamos 1.

✓ ***Suma y resta***.

Ejemplo 4

Una estudiante de bachillerato contrató una línea de celular en la que paga \$1.45 pesos el primer minuto de llamada local y \$0.80 pesos cada minuto adicional. Una vez habló por el celular con su mamá y tardó 15 minutos. Si tenía un saldo de \$125.35 pesos antes de iniciar la llamada, ¿qué saldo le quedó después de terminarla?

- En este caso primero debemos calcular el costo de la llamada y finalmente restar ese resultado al saldo que tenía antes de iniciar su llamada.
- Vamos a calcular el costo de la llamada:
- Para esto es importante considerar que el primer minuto costó \$1.45 pesos, y el resto, o sea, los otros 14 minutos costaron \$0.80 pesos cada uno...
- Definimos C como el costo de la llamada:

$$\begin{aligned} C &= 1.45 + (0.8)(14) \\ &= 12.65 \end{aligned}$$

- La llamada le costó \$12.65 pesos, pero ella tenía \$125.35 pesos de saldo, entonces,

$$\begin{aligned} \text{le quedaron:} \quad & 125.35 - C \\ = \quad & 125.35 - 12.65 = 112.70 \end{aligned}$$

Siempre que resolvemos un problema también es importante recordar que la solución nos dice algo acerca del problema.

Algunas veces esa solución nos ayuda a entender mejor un proceso o un fenómeno natural.

Los números son importantes porque gracias a ellos hemos tenido un avance tecnológico y científico como el que ahora conocemos.

En las vacaciones nos fuimos a Cerro Azul, Ver., y mi mamá compró varios recuerdos. Diez llaveros para mi tíos, cinco playeras para mis primos, una imagen de la virgen para mi abuelita y para mí, dos libros para que me ponga a estudiar. Los precios de cada artículo están en la siguiente tabla:

Artículo	**Precio**
Llavero	\$12.00 pesos
Playera	\$45.00 pesos
Imagen de la Virgen	\$125.00 pesos
Libro de Matemáticas	\$120.00 pesos

¿Cuánto gastó en los recuerdos de mi pueblo?

Ejemplo 5

- El problema indica que cada llavero cuesta lo mismo, al igual que los demás artículos que compró... Entonces, por los llaveros gastó:

$$\begin{aligned}\text{Número de llaveros} \times \text{Precio/llavero} &= \text{Costo de llaveros}\\ (10)(12) &= 120\end{aligned}$$

- Por las playeras gastó:

$$\begin{aligned}\text{Número de playeras} \times \text{Precio/playera} &= \text{Costo de playeras}\\ (5)(45) &= 225\end{aligned}$$

- Por mis libros gastó:

$$\begin{aligned}\text{Número de libros} \times \text{Precio/libro} &= \text{Costo de libros}\\ (2)(120) &= 240\end{aligned}$$

- En total gastó:

Por los llaveros:	120.00
Por las playeras:	225.00
Por la imagen de la virgen:	125.00
por mis libros:	240.00
	710.00

- En total gastó: \$710.00 pesos.

Algunas veces, conocer algunas propiedades de los números nos ayuda a resolver los problemas de una manera más sencilla. El siguiente ejemplo muestra una anécdota de uno de los mejores matemáticos de la historia de la humanidad.

Carl Friedrich Gauss fue un matemático alemán. A los 8 años, su maestro de primaria le pidió que sumara:

$$1+2+3+4+\cdots+99+100$$

Él utilizó el siguiente procedimiento...

Ejemplo 6

- Primero utilizó la propiedad que dice: "*si sumas varios números, el orden no importa, siempre obtienes el mismo resultado*"...
- Y él definió S como el resultado de la suma que estamos buscando...

- Entonces, esto nos permite escribir:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcccrcrcr} S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & \cdots & + & 99 & + & 100 \\ S & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & 97 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & 101 & + & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

- Pero el 101 se repite cien veces, porque cada lista de números de los primeros dos renglones va del 1 al 100 y del 100 al 1, respectivamente.

- Entonces, podemos obtener ese resultado como:

$$2S = (101)(100)$$

- En palabras, esto significa que 101×100 es igual al doble de la suma que buscamos.

- Si dividimos entre dos, obtenemos la suma que buscamos:

$$S = \frac{(101)(100)}{2} = \frac{10\,100}{2} = 5\,050$$

- Esto indica que: $1+2+3+4+\cdots+99+100 = 5\,050$

Si no crees, entonces haz la misma suma, pero a mano...

Ejemplo 7 Marco puede pintar una barda en 10 horas. Carlos puede pintar la misma barda en 15 horas. Don César encargó a los dos que pintaran la barda juntos. Si avanzan al ritmo que se indica antes, ¿cuánto tiempo tardarán en pintarla?

- Obviamente, Marco avanza más rápido que Carlos, porque tarda menos en pintar toda la barda.

- Nota que no tiene caso suponer que cada uno de ellos pintó la mitad de la barda, porque no avanzan al mismo ritmo al pintar.

- Dado que Marco tarda 10 horas en pintar toda la barda, en una hora hace un décimo del total.

- Por su parte, Carlos tarda 15 horas en terminar toda la barda, por eso en una hora avanza un quinceavo de la barda.

- Pintando juntos en una hora avanzan:

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{3+2}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

- Esto significa que los dos juntos avanzan un sexto de la barda y por eso, tardan 6 horas en pintar toda la barda.

El siguiente ejemplo se trata de un truco para calcular el cuadrado de ciertos números...

Ejemplo 8 Calcula los cuadrados de todos los números de dos cifras que terminan en 5 en las unidades.

- Para elevar al cuadrado un número de dos cifras que termina en 5 en las unidades, tomamos el dígito de las decenas y lo multiplicamos por su consecutivo.

- A la derecha del resultado escribimos el número 25.

- Por ejemplo, si quieres elevar el número 35 al cuadrado, el dígito de las decenas es 3, y su consecutivo es el 4...

- Los multiplicamos, y obtenemos: $3 \times 4 = 12$.

- Y ahora escribimos a la derecha del 12 el número 25. El resultado es el cuadrado de 35. Entonces, $35^2 = 1\,225$

- Ahora podemos calcular los cuadrados para llenar la siguiente tabla:

n	k	$k\,(k+1)$	n^2
15	1	$1 \times 2 = 2$	225
25	2	$2 \times 3 = 6$	625
35	3	$3 \times 4 = 12$	1 225
45	4	$4 \times 5 = 20$	2 025
55	5	$5 \times 6 = 30$	3 025
65	6	$6 \times 7 = 42$	4 225
75	7	$7 \times 8 = 56$	5 625
85	8	$8 \times 9 = 72$	7 225
95	9	$9 \times 10 = 90$	9 025

- Ahora podemos usar este truco para calcular el cuadrado de cualquier número de dos cifras que termina en 5.

- Verifica que en realidad los cálculos son correctos.

Ejemplo 9

Un diseñador industrial debe elegir las dimensiones de un envase de plástico en forma de caja que contendrá un líquido para una máquina. Las dimensiones de los envases se muestran en la siguiente tabla:

Envase	**Largo (cm)**	**Ancho (cm)**	**Fondo (cm)**
A	25	15	32
B	35	10	25
C	20	17	35
D	45	10	15

Él desea encontrar la caja que tenga al menos un volumen de 11 500 cm^3. ¿Cuál de esos envases debe elegir?

- Para saber si un envase de los propuestos cumplirá con la condición de que el volumen sea mayor que 11 500 cm^3, debemos calcular el volumen de cada uno.

- Para calcular el volumen de una caja multiplicamos largo por ancho por fondo.

- Los cálculos se muestran en la siguiente tabla:

Envase	**Largo (cm)**	**Ancho (cm)**	**Fondo (cm)**	**Volumen (cm^3)**
A	25	15	32	12 000
B	35	10	25	8 750
C	20	17	35	11 900
D	45	10	15	6 750

- Los resultados de la columna de la derecha, que contiene el volumen de cada envase, se obtuvo multiplicando las dimensiones de cada envase, es decir, los valores que aparecen en las otras columnas.
- Por ejemplo, para calcular el volumen del envase D, multiplicamos: $(45)(10)(15) = 6\,750$.
- Entonces, los envases A y C son los posibles candidatos a ser elegidos por el diseñador industrial.

Como puedes ver, la solución a un problema de matemáticas no siempre es única.

En este último ejemplo tenemos dos soluciones posibles al problema.

Otro punto importante a hacer notar es que la solución en este caso no es un número, como suele esperarse de la mayoría de los problemas matemáticos.

En este caso, la solución consiste en indicar qué envases tienen un volumen mayor a 11 500 cm^3.

El siguiente problema se queda como un reto.

Reto 1

Escribe los números del 0 al 10 realizando una o varias de las siguientes operaciones: suma, resta multiplicación, y división, elevar a una potencia o sacar raíz cuadrada, utilizando 4 veces el número 4. Por ejemplo, el número cero y el número dos pueden expresarse como sigue:

$$0 = \frac{4-4}{44}$$
$$2 = \frac{4\times 4}{4+4}$$

Ahora tú, encuentra los números del 0 al 10. Recuerda que es posible juntar números para formar 44, por ejemplo.

Ejercicios 1.2 Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios. No se permite el uso de calculadora.

1) $\sqrt{7}$ es un número natural. F
2) $\sqrt{100}$ es un número entero. V
3) 0 es un número irracional. F
4) π es un número racional. F
5) $\sqrt{\pi}$ es un número real. V
6) π^2 es un número natural. F
7) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ es un número racional. F
8) El conjunto de los números pares es cerrado bajo la suma. V

9) El conjunto de los números impares es cerrado bajo la suma. F

10) El conjunto de los pares es cerrado bajo la multiplicación. V

11) El conjunto de los impares es cerrado bajo la multiplicación. V

12) María tiene que realizar 4 mediciones del volumen contenido en un frasco de licuado. Debe reportar su medición en litros. Indica a qué conjuntos pertenece el resultado de la medición, en general: *naturales, enteros, racionales, irracionales, reales.* Racionales, Reales.

13) Luis compró un cinturón de 28 pulgadas de longitud. Si expresa esa longitud en centimetros obtiene 71.12 cm. Expresa este número en forma de una fracción. *Sugerencia: observa el número de decimales que tiene el número.* $\frac{7112}{100}$

14) ¿A qué conjunto pertenece el número de habitantes de una población? *naturales, enteros, racionales, irracionales, reales.* Naturales, Enteros, Racionales, Reales.

15) Un matemático creó un número menor a uno. Después del punto decimal escribió un uno,después un cero, después otro uno seguido de dos ceros, después otro uno seguido de tres ceros, y así sucesivamente *ad infinitum*. Este número es un número real. ¿A qué otro conjunto de números pertenece este número? Irracionales

16) Luis sale a correr cada mañana. El lunes corrió 12 kilómetros, el martes solamente 11 kilómetros, el miércoles, el jueves y el viernes corrió 15 kilómetros cada día. ¿Qué distancia recorrió en esos cinco días? 62 km.

17) Mi tío gana $1 200.00 pesos como mago. Generalmente tarda 3 horas y media en su trabajo. En promedio, ¿cuánto gana por minuto? $5.71 pesos/minuto.

18) El huracán Dean llegó a la ciudad de Chetumal, Q. R., México, con rachas de viento de 250 kilómetros por hora. Eso es equivalente a una velocidad del viento de 70 metros por segundo. La energía de un kilogramo de aire de ese viento se calcula elevando al cuadrado la velocidad del viento (en m/s) y sacando la mitad de ese resultado. ¿Qué energía tenían los vientos del huracán Dean? 2450 Unidades de energía.

19) En mis exámenes de matemáticas he obtenido las siguientes calificaciones: 7, 9, 8, 9.2, 6. ¿Qué promedio tengo hasta el día de hoy? 7.84

20) En tipografía, una línea puede contener entre 80 y 130 letras para que sea legible. En una página, debe haber entre 35 y 50 renglones. ¿Cuáles son los números de letras mínimo y máximo que caben en una página de acuerdo a las reglas tipográficas? Mínimo: 2800 letras; máximo: 2500 letras.

21) Daniela es la responsable del convivio mensual en su salón. Ella recauda $30.00 pesos de cada uno de sus 21 compañeros (ella también coopera) y con ese dinero compra comida, refrescos y un pastel para festejar a los que cumplieron años en ese mes. Todos quedaban sorprendidos por la comida tan buena que llevaba que le preguntaron cómo organizaba los gastos. Ella contestó: «*Fácil: ocupo un décimo en el pastel, y del dinero que queda, un onceavo corresponde a los refrescos.*» ¿Cuánto dinero ocupa en comprar comida? $540.00 en comida, $54.00 en refrescos y $66 en pastel.

22) Un huevo proporciona 82 calorías. Un niño utiliza 450 calorías cuando juega futbol en el recreo. ¿Cuántos huevos debe ingerir en su ingesta para suministrar las calorías que quemó en el recreo de hoy? 5.487 huevos.

23) El valor simplificado de:

$$\frac{10}{21}+\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{7}{12}\right)$$

es: 61/84.

24) ¿Cuál es el valor de $2^3+2^4+2^5$? 56

25) En su primer examen, Rubén obtuvo 12 reactivos correctos de un total de 20. En el segundo examen respondió 38 de las 40 preguntas correctamente. ¿En qué porcentaje aumentó su calificación? 35%

26) El corazón de un humano adulto late, en promedio, 70 veces por minuto. ¿Cuántas veces late el corazón de un adulto en un año aproximadamente? Late 36 792 000 veces aprox.

27) Una moneda de \$5.00 pesos pesa alrededor de 7 gramos. ¿Cuántas monedas de \$5.00 pesos igualan tu peso? Depende del peso del estudiante.

28) Una persona camina a razón de un paso por segundo. Si utiliza 30 minutos en su caminata diaria, y cada paso mide 75 cm., ¿qué distancia en metros recorre diariamente en su caminata? 1 350 m

29) Calcula la siguiente suma: $2+4+6+8+\cdots+200$ 10 100

30) Calcula: $1+3+5+7+\cdots+99$ 2 500

31) Calcula: $2+4+6+\cdots+2\,000$ 1 001 000

32) Calcula cada una de las siguiente sumas:

$$
\begin{aligned}
1 &= 1\\
1+3 &= 4\\
1+3+5 &= 9\\
1+3+5+7 &= 16\\
1+3+5+7+9 &= 25\\
1+3+5+7+9+11 &= 36\\
1+3+5+7+9+11+13 &= 49\\
1+3+5+7+9+11+13+15 &= 64\\
1+3+5+7+9+11+13+15+17 &= 81\\
1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 &= 100
\end{aligned}
$$

¿Encuentras algún patrón en las sumas? Obtenemos los cuadrados perfectos consecutivos sumando impares.

33) Una sucesión de números que aparece frecuentemente en la naturaleza es la llamada «*Sucesión de Fibonacci*». Los primeros 10 términos de esta sucesión son: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34. Encuentra los primeros 20 términos de esta sucesión. 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765

34) **Reto:** ¿Se puede aplicar el truco de elevar al cuadrado un número de dos cifras que termina en cinco en las unidades a los números de 3 cifras que terminan en 5? Verifica realizando los cálculos sin calculadora. Sí.

1.3 Razones y Proporciones

En la vida real surgen muchas ocasiones en las que deseamos comparar dos cantidades. Para compararlas tenemos muchas opciones válidas, pero la que nos provee de información más rápidamente es la razón, que está relacionada con la proporción.

Definición 8

Razón
Considere los números a y b. La razón de ellos es el cociente obtenido al dividirlos:

$$\frac{a}{b}$$

En otras palabras, la razón de dos números es igual al cociente entre ellos.

Las razones se definen a partir de la división y se explican con fracciones porque en realidad una fracción nos indica una razón.

Por eso tenemos las fracciones equivalentes.

Ejemplo 10

Las fracciones $\frac{2}{7}$ y $\frac{10}{35}$ son equivalentes. Muestra utilizando la definición de proporción que es así.

- De acuerdo a la definición, la fracción $\frac{2}{7}$ indica la proporción de los números 2 y 7.
- Esto significa que en el numerador hay 2 por cada 7 que hay en el denominador de la fracción.
- Si agrego 2 en el numerador, para seguir teniendo la misma proporción, debo agregar siete en el denominador.
$$\frac{2}{7} = \frac{2+2}{7+7} = \frac{4}{7}$$
- Esto es equivalente a multiplicar tanto el numerador como el denominador por 2:
$$\frac{2}{7} = \frac{4}{7} = \frac{(2)(2)}{(7)(2)}$$
- Igual, en lugar de multiplicar por 2 en el numerador y en el denominador, podemos multiplicar por cualquier otro número distinto de cero y obtenemos una fracción equivalente.
- Si multiplicamos por 5 en el numerador y en el denominador, obtenemos:
$$\frac{2}{7} = \frac{(2)(5)}{(7)(5)} = \frac{10}{35}$$
- Esto nos indica que ambas fracciones están en la misma proporción, es decir, son equivalentes.

Ejemplo 11

En las pasadas elecciones de un pueblo el candidato A obtuvo 4 875 votos a su favor, mientras que el candidato B obtuvo 1 625. ¿En qué proporción están sus respectivas votaciones?

- Por definición, debemos dividir el número de votos que obtuvo el candidato A entre el número de votos que obtuvo el candidato B.

$$\frac{\text{Votos del candidato A}}{\text{Votos del candidato B}} = \frac{4\,875}{1\,625} = 3$$

- Este resultado nos indica que el candidato A obtuvo 3 votos por cada voto que obtuvo el candidato B.
- Esta misma información obtenemos si encontramos la razón de los votos del candidato B con respecto al candidato A:

$$\frac{\text{Votos del candidato B}}{\text{Votos del candidato A}} = \frac{1\,625}{4\,875} = \frac{1}{3}$$

- La fracción $1/3$ nos dice que por cada voto que obtuvo del candidato B, el candidato A obtuvo 3.

En este ejemplo se conocían dos datos y éstos no se pueden cambiar. En algunos casos tenemos más información y la proporción nos puede ayudar a calcular un dato desconocido.

Para esto, tenemos que saber que hay varios tipos de proporción.

Definición 9

PROPORCIÓN
Es una igualdad entre dos razones. Por ejemplo,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Esta misma proporción también podemos escribirla como: $a : b :: c : d$.

Definición 10

PROPORCIÓN DIRECTA
Cuando dos cantidades están relacionadas de tal forma que cuando una cantidad crece la otra también crece el mismo número de veces, entonces tenemos una proporción directa.

Ejemplo 12

Un paquete con 600 ml de refresco cuesta \$5.00 pesos. ¿Cuánto cuesta un litro de ese refresco?

- Sabemos que 600 ml de refresco cuestan \$5.00 pesos.
- La sexta parte de 600 ml debe costar la sexta parte de \$5.00 pesos.
- Es decir, 100 ml de ese refresco deben costar \$5.00/6 pesos.
- Un litro de refresco equivalen a 1 000 ml.
- Y 1 000 ml equivalen a 10 veces 100 ml.
- Entonces, 1 litro de ese refresco debe costar 10 veces más que lo que cuestan 100 ml.
- Esto es, 1 litro de ese refresco cuesta: $(10) \cdot (5/6) = 50/6 = \$9.33$ pesos.

Ejemplo 13

Un vendedor de Hot Dogs puede preparar 20 Hot Dogs en 30 minutos. ¿Cuántos puede preparar en 45 minutos?

- Nosotros sabemos que puede preparar 20 hot dogs en 30 minutos.
- Entonces puede preparar el doble de hot dogs en el doble de tiempo.

- Y debe preparar la mitad de hot dogs en la mitad del tiempo.
- Eso significa que puede preparar 10 hot dogs en la mitad de 30 minutos, es decir, en 15 minutos.
- Entonces, si sumamos lo que puede preparar en 30 minutos con lo que puede preparar en 15 minutos, obtenemos lo que puede preparar en 45 minutos.
- En conclusión, puede preparar $20+10=30$ hot dogs en 45 minutos.

En un asilo se consumen 14 kg de harina por semana (7 días). ¿Cuántos kilogramos de harina se consumen en 30 días?	**Ejemplo 14**

- En la séptima parte del tiempo se consume la séptima parte de kilogramos de harina.
- Esto significa que en un día se consumen 2 kilogramos de harina.
- En 30 días se consumen 30 veces más de harina que lo que se consume en un día,
- Esto indica que en 30 días se consumen $(2)(30)=60$ kilogramos de harina.

Los problemas de proporción directa se resuelven de manera más sencilla si utilizamos la regla de 3 directa.

Por ejemplo, en el caso de los Hot Dogs, escribimos en una columna el número de Hot Dogs que puede preparar y en otra la cantidad de minutos que requiere:

	Hot Dogs		Minutos
Datos conocidos:	20	$\Rightarrow$	30
Para calcular:	x	$\Rightarrow$	45

Para resolver este problema con este segundo método observa que si dividimos 20 (Hot Dogs) entre 30 (minutos) obtenemos la proporción que indica cuántos Hot Dogs prepara el vendedor en un minuto[1]. Si multiplicamos este resultado por 45 (minutos) obtenemos la cantidad de Hot Dogs que prepara en esa cantidad de tiempo.

Entonces,

$$x=(45)\cdot\frac{20}{30}=(\cancel{3})(15)\cdot\left(\frac{2}{\cancel{3}}\right)=30$$

Sabemos que en el asilo se consumen 14 kg de harina en 7 días, la razón $14\ /\ 7=2$ nos indica que se utilizan 2 kilogramos de harina por día en ese asilo. En 30 días se deben utilizar 30 veces más, es decir, $(30)(2)=60$ kilogramos de harina.

En forma de regla de tres directa, tenemos:

[1] En realidad, esta proporción nos indica que el vendedor prepara 2 Hot Dogs en 3 minutos, o bien, dos tercios de Hot Dogs en un minuto.

	kg de harina	$\Rightarrow$	Días
Datos conocidos:	14	$\Rightarrow$	7
Para calcular:	x	$\Rightarrow$	30

Y al realizar las operaciones, obtenemos:

$$x = (30) \cdot \left(\frac{14}{7}\right) = (30)(2) = 60$$

Observa que debido a que la multiplicación y la división tienen la misma prioridad como operaciones, en realidad no importa qué operación realicemos primero. Bien podemos primero dividir y después multiplicar, bien podemos primero multiplicar y después dividir... en ambos casos siempre obtendremos el mismo resultado.

Por esto, es una costumbre utilizar la regla de tres directa de la siguiente manera:

	kg de harina	$\Rightarrow$	Días
Datos conocidos:	14	$\Rightarrow$	7
Para calcular:	x	$\Rightarrow$	30

empezamos multiplicando el único número que conocemos del renglón donde se encuentra nuestra incógnita (30) por el número que se encuentra en el otro renglón y en la otra columna (14) y este resultado lo dividimos por el último número conocido (7).

$$x = \frac{(30)(\cancel{14})}{\cancel{7}} = (30)(2) = 60$$

Se queda como ejercicio para ti realizar este procedimiento para el caso del vendedor de Hot Dogs.

Una proporción directa que es utilizada comúnmente es el porcentaje.

Definición 11

PORCENTAJE
Es una proporción de algo a cien. La palabra «porciento» indica cuántos se tomarán por cada cien.

Ejemplo 15

Luisa compró un vestido. Como le hicieron un descuento del 25%, solamente pagó \$180.00 pesos. ¿Cuál es el precio original (sin descuento) de ese vestido?

- Para calcular el precio con descuento del vestido, debieron restar el 25%.
- Definimos con P al precio original (sin descuento) del vestido,
- Entonces, $0.25\,P$ es el descuento que se le hizo,
- Y el precio con descuento es:
$$P - 0.25\,P = 0.75\,P$$
- Esto indica que pagó solamente el 75% del precio original del vestido.
- Y este precio fue de \$180.00 pesos.

- Entonces,

$$0.75\,P = 180 \qquad \Rightarrow \qquad P = \frac{180}{0.75} = \frac{180}{\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{(4)(\cancel{180})}{\cancel{3}} = (4)(60) = 240$$

- Esto nos dice que el precio sin descuento del vestido era de \$240.00 pesos.
- En efecto, si calculamos el 25% de \$240.00 pesos, entonces debemos sacar la cuarta parte,
- es decir, \$60.00 pesos es el 25% de \$240.00
- A \$240.00 le restamos \$60.00 y obtenemos \$180.00 que es el precio con el 25% de descuento.

Ejemplo 16

Un paquete de cereal contiene 15% más gratis. Si el envase inicialmente contenía 680 gr., ¿cuántos gramos contiene ahora?

- Sabemos que originalmente el envase contenía 680 gramos.
- El 10% de esa cantidad es la décima parte, porque 10 es la décima parte de 100.
- Y el porcentaje se refiere a la proporción por cada cien...
- La décima parte de 680 gr., es 68 gr.
- Entonces, el 10% de 680 es 68.
- La mitad del 10% es el 5%.
- Entonces, el 5% de 680 es la mitad de 68, es decir, 34.
- Si sumamos el 10% de 680 y el 5% de 680 obtenemos el 15% de 680.
- Esto es, el 15% de 680 es $68 + 34 = 102$
- Entonces, el envase contiene 102 gramos de más...
- Si originalmente contenía 680 gramos, junto con los 102 gramos gratis (el 15%) obtenemos un nuevo total de 782 gramos.

Definición 12

PROPORCIÓN INVERSA
Dos cantidades están en proporción inversa si al crecer una, la otra decrece, en la misma razón.

Por ejemplo si una aumenta al doble, la otra disminuye a la mitad.

Ejemplo 17

Dos trabajadores tardan 32 horas en pintar una barda. ¿Cuántos trabajadores se requieren para que realicen la tarea en 4 horas?

- Si se asignan el doble de trabajadores deben tardar la mitad del tiempo.

- Entonces, si hay
  - ✓ 4 trabajadores deben tardar 16 horas,
  - ✓ y 8 trabajadores deben tardar 8 horas,
  - ✓ y 16 trabajadores deben tardar 4 horas,...
- Todo esto, suponiendo que los trabajadores siempre trabajan al mismo ritmo y que no se estorban entre ellos para realizar la tarea.

Las proporciones inversas aparecen muy frecuentemente. Sin embargo, debido a que mucha gente no conoce su nombre, no las reconoce como tal.

Ejemplo 18 En un viaje, 300 personas requieren de 975 litros de agua para consumo (elaboración de alimentos y bebidas) durante un día. Si hacemos caso del dicho: «*una persona necesita de dos litros de agua diarios*», ¿para cuántas personas alcanzará el agua?

- La respuesta es inmediata: como cada persona requiere de dos litros, dividimos el número de litros de agua que llevan consigo y obtenemos el resultado de nuestro problema:

$$\frac{975}{2} = 487.5$$

- Esto nos dice en palabras que si cada persona consume dos litros de agua por día, entonces 975 litros podrán dar a 487.5 personas agua en un día.
- Sin embargo debes observar que inicialente había 300 personas asignadas a los 975 litros de agua.
- Esto significa que (en promedio) consumían más de 2 litros de agua:

$$\frac{975}{300} = 3.25$$

- Entonces, este problema tiene relacionadas sus variables con una proporción inversa: cuando aumenta el número de litros de agua que consume diariamente una persona, pueden dar agua a menos personas...
- Y cuando disminuye el número de personas a las que se les va a repartir el agua, pueden que darles más litros de agua a cada uno de ellos.

Estos dos tipos de variaciones no son los únicos. Existen otros tipos de variaciones.

Por mencionar un ejemplo, tenemos la energía que contiene el viento. Cuando la velocidad del viento aumenta al doble, la energía que contiene un kilogramo de ese aire en movimiento aumenta ocho veces. Si se triplica la velocidad del viento, la energía aumenta 27 veces, y si la velocidad incrementa al cuádruplo, la energía se multiplica por 64.

Entonces, si la velocidad del viento se multiplica por k, la energía contenida ahí se multiplica por k^3.

Este tipo de variación se conoce como variación cúbica, por obvias razones[2].

Otro tipo de variación consiste en la variación exponencial. Este tipo de variación es la que se utiliza para determinar la edad de los huesos de dinosaurios y seres que existieron en nuestro planeta hace millones

[2] Observa que el número que utilizaste para multiplicar a la velocidad del viento se elevó al cuadrado para conocer en qué proporción aumentó la energía que contiene.

de años. En este tipo de variación la cantidad que aumenta o disminuye depende de la cantidad que quedaba antes.

Por ejemplo, es posible definir que una proporción exponencial varíe de un día a otro con la mitad de lo que había al día anterior. Si el lunes tenía 16 gramos de una sustancia que varía de esa forma, entonces el martes habrá la mitad, es decir, 8 gr., el miércoles habrá la mitad de lo que quedaba el martes, es decir, 4 gr., el jueves habrá 2 gr., el viernes 1 gr., y así sucesivamente.

Las poblaciones de algunas especies tienen un crecimiento exponencial también[3].

Como puedes ver, las razones y proporciones aparecen en muchas áreas distintas, además de que hay otras formas de variación entre dos cantidades que hemos dejado sin estudiar.

Resuelve cada uno de los siguientes problemas. Identifica primero si se trata de una proporción directa o inversa.	**Ejercicios 1.3.0**

1) Don Macario compró cubetas a \$12.00 pesos cada una y las está vendiendo a \$20.00 pesos cada una. ¿Cuál es la proporción entre los precios de compra y el precio de venta de las cubetas de Don Macario? $12/20 = 3/5 = 0.6$

2) ¿Qué indica la proporción del ejercicio anterior? Cada cubeta le cuesta el 60%, es decir, 3/5, del precio de venta.

3) A la gasolina se le aumentó un 5.5% en su precio por litro. Su precio incial era de \$5.32 pesos por litro. ¿Qué precio tiene ahora, después de haber afectado el precio? \$5.61 pesos.

4) Una máquina puede pintar 12 kilómetros de la línea de la carretera federal en una hora. ¿Cuánto tiempo requiere para pintar 108 kilómetros? 9 hr.

5) Carlos compró 12 lápices por \$10.00 pesos. ¿Cuánto debe pagar por 30 lápices? \$25.00 pesos.

6) Tres lápices cuestan \$17.00 pesos. ¿Cuánto debo pagar por doce de esos lápices? \$68.00 pesos.

7) Marco compró un pantalón. Cuando pagó le dijeron que el precio que tenía el pantalón incluía un 15% de descuento. Si el pantalón le costó \$255.00 pesos, ¿cuál era el precio del pantalón sin descuento? \$300.00 pesos.

8) Andrei Jagodzinski es un pianista polaco. En su último contrato ganó 2.3 veces más que en el anterior. ¿En qué porcentaje aumentó su ingreso por concierto? 230%

9) En la película *King Kong en Nueva York*, un gorila fue filmado y al editar en *doble cámara* el gorila aparecía enorme. En la realidad, el gorila medía 1.45 metros. Si de acuerdo a mediciones realizadas en la película, la escala indica que tenía 12 metros de alto, ¿por qué número multiplicaron la altura verdadera del animal? 8.2

10) Si una persona de 1.75 metros de altura hubiera sido aumentada en sus dimensiones al igual que el gorila en la película de King Kong, ¿qué tan alto se vería? 14.48 m

11) De entre 35 000 personas encuestadas, 86% opina que los problemas más serios que enfrenta la humanidad actualmente están relacionadas con problemas ambientales. ¿Cuántas personas en total opinó eso? 30 100

12) Un complemento alimenticio líquido embotellado de 2.5 litros cuesta \$15.00 pesos. ¿Cuánto cuesta una porción de 500 ml? \$3.00 pesos

13) Un tornillo pesa aproximadamente 15 gramos. ¿Cuántos de esos tornillos hay en una bolsa de un kilogramo? 67 tornillos aprox.

[3]Dentro de ciertos límites.

14) Un kilogramo de huevo de gallina contiene 18 huevos. ¿Cuál es el peso aproximado de un huevo de gallina? $55.\bar{5}$ gr aprox.

15) ¿Cuántos huevos habrá, aproximadamente, en 2 kg de huevos? 36 huevos aprox.

16) Considerando la información de los dos ejercicios anteriores, y sabiendo que una tapa de huevo contiene 30 huevos y una caja contiene 12 tapas, ¿cuánto debe pesar una caja de huevos? (ignora que el peso de las tapas y de la caja que los contiene). 20 kg aprox.

17) Un envase de 100 ml tiene 7/8 ocupados con agua. ¿Qué volumen de agua tiene? 87.5 ml de agua.

18) Cuando Doña Pifa compra 12 panes debe pagar $54.00 pesos. ¿Cuánto debe pagar por 20 de esos panes? $90.00 pesos

19) Lalito compró un disco duro externo de 160 Gb de capacidad para almacenar la información de su LapTop, porque debía formatearla. La capacidad del disco duro de su LapTop es de 120 Gb. ¿Cuál es la razón de las capacidades de los discos duros? (Simplifica el resultado) Externo:Laptop = 4/3. Laptop:externo = 3/4.

20) La razón de la altura a la base de una puerta es 12 : 5. Si ésta tiene una altura de 2.1 metros, ¿cuál es la longitud de su base? 0.875 metros = 87.5 cm.

21) **Química:** Una solución utilizada como tinta para marcar huellas digitales utiliza 2 ml de sales de hierro, 1.33 ml de sales de potasio, 0.17 ml de amonio y 16.5 ml de agua. Encuentra los mililitros que se deben utilizar de cada químico para preparar 2 litros de la solución. Recuerda que 1 litro equivale a 1 000 ml. 200 ml sales de hierro, 133 ml s. potasio, 17 ml amonio y 1650 ml agua.

22) **Química:** En una mina se extrae material que contiene 93% de hierro, 3% de carbón, 2% de azufre y el resto son trazas de otros metales. ¿Cuántos kilogramos de carbón se extraen en una semana (7 días) si diariamente se extrae 2.5 toneladas de material? (Recuerda que una tonelada equivale a 1 000 kg.) 525 kg.

23) **Medicina:** En física la densidad se define como la razón de la masa al volumen. Los dentistas utilizan el mercurio para colocar amalgamas en los dientes que han sufrido de caries leves. Un frasco de 15 ml de mercurio pesa 203.91 gramos. ¿Cuál es la densidad del mercurio? 13.594 gr/ml

24) **Física:** El coeficiente de dilatación lineal térmica en un material se refiere al cociente del incremento en la longitud ΔL de una varilla debido al aumento de temperatura entre su longitud inicial L. Si una varilla de $L = 1$ m aumenta su temperatura de 20°C a 21°C su longitud se incrementa en 0.005 metros. ¿Cuál es el coeficiente de dilatación lineal térmica de ese material? 0.005

25) **Física:** La presión se define como el cociente de la magnitud de la fuerza F al área A sobre la cual se distribuye. ¿Qué información nos da esa razón? Cuántas unidades de fuerza soporta cada unidad de área.

26) **Química:** Se sabe que 18 gr de agua pura contienen 6.0235×10^{23} moléculas de agua. Considerando que una molécula de agua tiene dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno, ¿cuántos átomos de hidrógeno hay en esos 18 gr de agua? 1.2047×10^{24} átomos de H

27) **Química:** Cuando 37.9968 gr de flúor gaseoso reacciona con suficiente hidrógeno gaseoso se producen 40.01268 gr de ácido fluorhídrico. Si se requieren preparar 100 gr de ese ácido, ¿cuántos gramos de flúor se deben hacer reaccionar con hidrógeno? 94.9619 gr.

28) **Química:** La reacción química del ejercicio anterior es la siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} H_2(g) & + & F_2(g) & \longrightarrow & 2HF(g) & + & 128 \text{ Kcal} \\ 2.016 \text{ gr} & + & 37.99 \text{ gr} & \longrightarrow & 40.006 \text{ gr} & & \end{array}$$

El último término de la primera ecuación: 128 Kcal, indica que cuando reaccionan 2.016 gr de H_2 (hidrógeno) con 37.99 gr de F_2 (flúor) se producen 128 Kcal además de los 40.006 gr de HF (ácido fluorhídrico). ¿Cuántos gramos de H_2 deben reaccionar para generar 50 Kcal? 0.7875 gr

29) **Reto: (Física)** La aceleración de un objeto se define como el cociente del cambio de velocidad entre el tiempo que requirió ese cambio. Matemáticamente:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\text{Incremento de velocidad}}{\text{Intervalo de tiempo}}$$

Físicamente, ¿qué información nos dice la aceleración?

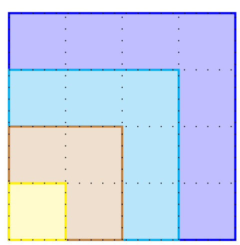
30) **Reto: (Física)** El calor específico de una sustancia es numéricamente igual a la cantidad de calor Q que hay que suministrar por cada unidad de masa m de esa sustancia para aumentar su temperatura un grado centígrado. ¿Qué fórmula calcula el calor específico c de una sustancia si se conocen Q y m? $c = Q/m$

31) **Reto: (Demografía)** La población de un municipio ha crecido durante los últimos diez años a razón de 3% por año. Si la población en el año 2 000 era de 1 250 000, y suponiendo que la población seguirá creciendo a la misma razón, ¿cuál será la población en el año 2 010?

32) **Reto: (Economía)** Durante los últimos cinco años, la inflación en el país X ha crecido en promedio un 5% por año. En el año 2 000 la despensa de la canasta básica para una semana de una familia costaba $750.00 pesos. Si la inflación continúa así, ¿cuánto costará esa despensa en el año 2 010?

33) **Reto: (Matemáticas)** El área de un círculo de radio r puede calcularse con la siguiente fórmula: $A = \pi r^2$. Esta área puede pensarse como el área que barre un radio cuando gira un ángulo de 360°. Encuentra una fórmula para calcular el área de un sector del círculo de ángulo a°. $A_x = a\,\pi r^2/360.$

34) **Reto:** Cuando se incrementan las dimensiones de un cuadrado al doble, el área crece, pero no al doble. Cuando las dimensiones se aumentan al triple, el área de nuevo crece, pero no al triple. ¿Puedes describir cómo crece el área dependiendo del crecimiento de las longitudes de los lados del cuadrado?



1.4 Lenguaje algebraico

Las matemáticas son un lenguaje, hecho por los humanos para los humanos.

Como todo lenguaje, tiene sus reglas, y si conoces sus reglas, podrás entender todas las matemáticas.

Evidentemente, la base está en este lenguaje que nos ayuda a describir con palabras lo que dicen los objetos matemáticos, es decir, las ecuaciones, funciones, gráficas, vectores, etc.

Para poder entender las matemáticas más elementales, debes conocer el significado de las siguientes palabras:

Palabra	Significa
Suma	resultado de una suma
Diferencia	resultado de una resta
Producto	resultado de una multiplicación
Cociente	resultado de una división
Doble, triple,...	multiplicar por 2, 3, etc.
Mitad, tercio,...	dividir entre 2, 3, etc.
Cuadrado	resultado de elevar al cuadrado
Cubo	resultado de elevar al cubo
Cuarta potencia	elevar a la potencia 4
Raíz cuadrada	calcular raíz cuadrada
Raíz cúbica	calcular raíz cúbica

En realidad esta lista ya debes conocerla. Cuando una persona te pide: «*suma 3 al número 2*», en realidad entiendes lo que debes hacer.

Sin embargo, algunas palabras prácticamente nunca las utilizamos, a pesar de que ya sabemos realizar la operación.

Ejemplo 19

Traduce a lenguaje matemático, es decir, a una expresión algebraica, el siguiente enunciado:

El doble de un número menos el cuadrado de otro.

- Vamos a trabajar con dos cantidades desconocidas, la primera la llamaremos x y a la segunda y.
- Como ya sabemos, la palabra “*doble*” nos indica que multipliquemos por dos: $2x$ indica el doble del primer número.
- “*El cuadrado del otro*” quiere decir: “*multiplica el número por sí mismo dos veces*”, es decir, “*elevalo al cuadrado*”.
- Entonces, la expresión algebraica que expresa matemáticamente esa frase es: y^2.
- Finalmente, la frase “*El doble de un número menos el cuadrado de otro*”, matemáticamente se escribe:
$$2x - y^2$$
- Con lo que hemos traducido al lenuaje matemático la frase.

Cualquier expresión matemática, por más compleja que parezca, siempre puede expresarse en palabras a través del lenguaje algebraico.

Otras palabras que se usan frecuentemente en el lenguaje algebraico son las siguientes:

Palabra	Significa
Aumentado	más o sumado a
Disminuido	menos o restado de
Razón	cociente
Proporción	cociente
Incrementado	sumado
Semi	mitad de...

Ejemplo 20

Traduce a una expresión matemática la siguiente frase: «*El área de un cuadrado es igual al cuadrado de la longitud de uno de sus lados.*»

- Primero debemos notar que se está hablando de una fórmula de geometría.
- Necesitamos una literal para denotar el área del cuadrado.
- Por similitud, utilizaremos A.
- Y para denotar la longitud del lado del cuadrado usaremos l.
- Entonces, el área (A) la encontramos elevando al cuadrado la longitud del lado (l):

$$A = l^2$$

- Esta es la fórmula que nos expresa matemáticamente la frase que nos pidieron traducir al lenguaje algebraico.

Seguramente ahora podrás reconocer las fórmulas de geometría como expresiones que nos dan información acerca de las figuras a las cuales corresponden.

La fórmula del área del círculo, por ejemplo: $A = \pi r^2$ nos indica que su área depende solamente de una medida: su radio. Esto es semejante al caso del cuadrado: su área solamente depende de la longitud de uno de sus lados.

Ejemplo 21

Traduce a una expresión matemática la siguiente información:«*Carlos tiene 6 canicas más que Benjamín. Entre los dos tienen en total 78 canicas.*»

- Vamos a utilizar la letra C para denotar la cantidad de canicas que tiene Carlos.
- Y B servirá para denotar la cantidad de canicas que tiene Benjamín.
- Sabemos que Carlos tiene 6 canicas más que Benjamín, así que si sumamos 6 al número B obtenemos lo que tiene Carlos:

$$C = B + 6$$

- Si sumamos las dos cantidades, obtenemos lo que tienen los dos juntos, en este caso, 78 canicas:

$$B + C = 78$$

- Pero ya habíamos encontrado que $C = B + 6$, por lo que podemos escribir también:

$$B + (B + 6) = 78$$

- Cualquiera de las dos ecuaciones sirve como solución al texto dado en el encabezado del ejemplo.
- Más adelante estudiaremos cómo resolver estas ecuaciones.

Es importante que notes que dos ecuaciones distintas en el ejemplo anterior pueden servir para expresar exactamente la misma situación. Cuál utilizar dependerá de la situación en la que nos encontremos.

Observa que algunas veces podemos expresar la misma información de varias maneras distintas. Después de todo, las matemáticas son un lenguaje.

Ejemplo 22

Expresa en forma de una ecuación la siguiente información: «*Un rectángulo tiene un área de 84 metros cuadrados. Sabemos que su base mide 5 metros más que su altura.*»

- Denotemos con una literal la altura del rectángulo, por ejemplo, h.
- Para nosotros la letra h representa los metros que mide la altura del rectángulo.
- El texto nos dice que la base mide 5 metros más, es decir, tengo que sumar 5 a la altura para obtener lo que mide la base:
$$b = h + 5$$
- Además, sabemos que el área del rectángulo es igual a 84 metros cuadrados. Entonces:
$$\begin{array}{rcl} \text{Área} & = & \text{base} \times \text{altura} \\ A & = & b \cdot h \quad = \quad (h+5)\cdot h \\ 84 & = & (h+5)\cdot h \end{array}$$
- Esta ecuación expresa matemáticamente el texto que se dio en el encabezado del ejemplo.

El ejemplo anterior nos dice algo importante: las expresiones matemáticas nos dan información acerca de algún proceso. En este caso, la ecuación $(h+5)\cdot h = 84$ nos indica las condiciones para que el área de un rectángulo sea igual a 84 unidades cuadradas si su base mide 5 unidades más que su altura.

No siempre es así de fácil obtener información de una ecuación, pero cuando sea posible, es importante reconocerla porque así tendremos mayor información acerca del problema que estamos resolviendo.

Ejemplo 23

Escribe en palabras la siguiente expresión algebraica:
$$\frac{x+y}{x-y}$$

- Primero observamos que se trata de la división de dos cantidades,
- La cantidad que está en el numerador es *la suma de dos números*,
- y la cantidad que está en el denominador es *la diferencia de los mismos números*.
- Ahora, debemos recordar que el resultado de una división, en matemáticas se llama: *cociente*.
- Entonces,
$$\frac{x+y}{x-y}$$
se lee:

El cociente de la suma de dos números entre su diferencia.

El lenguaje algebraico es la forma como expresamos los procedimientos para resolver problemas matemáticos de todas sus áreas.

Continuamos con la aplicación del lenguaje algebraico en la solución de problemas aritméticos y geométricos.

1.4.1 Algoritmos aritméticos y geométricos

El lenguaje algebraico nos ayuda a expresar en palabras ecuaciones o a escribir en forma de ecuación una o varias operaciones que debemos realizar con algunas cantidades.

Ejemplo 1

Escribe en forma de expresión algebraica el siguiente juego:
Piensa un número, sumale dos; al resultado multiplícalo por 3, después réstale 6. Calcula la tercera parte de ese resultado y obtienes el número que pensaste.

- Primero debemos definir el número que pensó: x.
- A ese número le van a sumar 2, así obtenemos: $x+2$.
- Al resultado van a multiplicarlo por 3, con lo que obtenemos: $3(x+2)$.
- Después le restan 6, y así se obtiene: $3(x+2)-6$.
- Finalmente, dividimos entre 3, esto se denota por:

$$\frac{3(x+2)-6}{3}$$

- Y terminamos.

Es importante que observes que cuando multiplican por 3, no escriben: $3x+2$, porque en este caso, estamos multiplicando por 3 el número que pensaron y al resultado le sumamos dos.

Para que te convenzas que los resultados son distintos, puedes considerar distintos valores y verás que no obtienes el mismo resultado.

Por ejemplo, digamos que pensaste el número 10. Si sumamos 2 obtenemos 12, y después multiplicamos por 3 para obtener 36. Por otra parte si multiplicas 3 por 10 (el número que pensaste, sin sumar 2) obtienes 30, y después sumamos 2 para obtener 32. Como ya sabemos $36 \neq 32$.

En matemáticas, cuando se explica un resultado, necesariamente debemos utilizar palabras que indiquen cada objeto o idea.

Si no memorizas los significados de las palabras que aparecen en las tablas dadas anteriormente, no podrás aprovechar tus cursos de matemáticas, incluyendo éste.

Ejemplo 2

Explica si es correcta o incorrecta la siguiente aseveración:

El promedio de dos números es igual a su semisuma.

- Calculamos el promedio sumando los números y dividiendo entre el número de datos.

- En este caso estamos hablando de 2 números,
- ...entonces, el promedio en este caso es:
$$\frac{x+y}{2}$$
- Por otra parte, «*semi*» significa mitad, es decir, dividir entre dos.
- La *semi suma de los números* indica que debemos dividir entre dos la suma de los números...
- y eso es precisamente lo que escribimos:
$$\frac{x+y}{2}$$
- Esto nos indica que la aseveración es correcta.

Una paquete de galletas indica en la tabla de especificaciones nutricionales que cada galleta contiene 54.5 kilocalorías (kCal). Pedro también compró 250 mL de una bebida que contenía 505 kCal en total. Si él se tomó los 250 mL de bebida y además comió n galletas. **(a)** ¿Cuántas kilocalorías ingirió? **(b)** Traduce a lenguaje algebraico la expresión obtenida.

Ejemplo 3

- Este es un problema clásico de dieta.
- Llamemos C la cantidad de kilocalorías que ingirió Pedro.
- Las kCal que ingirió al tomar la bebida son 545 kCal.
- Hasta ahora, considerando solamente las kCal ingeridas debido a la bebida son:
$$C = 505$$
- Pero no es lo único que ingirió... También comió n galletas.
- Sabemos que cada galleta le provee de 54.5 kCal.
- Si él come solamente una galleta, ingiere 54.5 kCal,
- Si come dos galletas, ingiere (54.5)(2) kCal,
- Si come tres galletas, ingiere (54.5)(3) kCal, etc.,
- Y en general, si come n galletas, está ingiriendo $(54.5 \cdot n)$ kCal.
- Entonces, considerando la bebida, más las galletas que comió, en total ingirió:
$$C = 505 + 54.5\,n$$
- Una vez que conozcamos el valor de n, el número de galletas que comió, podremos conocer el total de kCal que ingirió.
- Ahora traducimos al lenguaje algebraico esta expresión:

El número de kilocalorías que ingirió Pedro es igual a 505 kCal, que ingirió por tomar 250 mL de una bebida, aumentado con el producto de las kCal que contiene una galleta, es decir, 54.5 kCal, por el número de galletas que ingiera, que hemos denotado por n.

Comentario

Ejemplo 4 Un truco para multiplicar por 9 mentalmente.

- Cuando tengas que multiplicar por 9, es mejor agregar un cero a la derecha del otro factor y restar el factor del número así obtenido.
- Por ejemplo, $9 \times 123 = 1\,230 - 123 = 1\,107$.
- La justificación de este procedimiento es muy sencilla. Cuando multiplicamos un número k por 9, en realidad estamos sumando $k + k + \cdots + k$ nueve veces.
- Cuando agregamos un cero a la derecha del número k, obtenemos el resultado de multiplicarlo por 10.
- Cuando restamos k a este resultado, obtenemos $9\,k$.
- Es decir, $10\,k - k = 9\,k$.

Debes recordar que multiplicar significa sumar de una manera abreviada. Por ejemplo, si multiplicas 3×4, en realidad estás sumando $3+3+3+3$, o bien, $4+4+4$. En ambos casos obtienes el mismo resultado porque $3 \times 4 = 4 \times 3$.

Ejemplo 5 Multiplicar un número por 99 mentalmente.

- Este caso es similar al anterior: agregamos dos ceros a la derecha del otro factor y restamos el número.
- Por ejemplo: $99 \times 23 = 2\,300 - 23 = 2\,277$.
- La justificación está en que $100 = 99 - 1$.
- Es decir, multiplicamos 100 por el otro factor y después lo restamos, con lo que terminamos multiplicando por 99.
$$99\,k = 100\,k - k$$
- Ahora generaliza este procedimiento para poder multiplicar por cualquier número cuyos dígitos sean solamente nueves.

Ejemplo 6 Multiplicar un número de dos cifras por 11

- La regla es muy sencilla. Sumar las dos cifras, y escribir el número en medio de las cifras.
- Cuando la suma es mayor o igual a 10, escribe en medio la cifra de las unidades (de la suma) y suma uno a la cifra de las decenas para escribirlo en las centenas.
- Por ejemplo: $11 \times 23 = 253$.
- Este truco se explica fácilmente cuando se desarrolla la multiplicación de manera convencional.

$$\begin{array}{cccc} & & 2 & 3 \\ & \times & 1 & 1 \\ \hline & & 2 & 3 \\ & 2 & 3 & \\ \hline & 2 & 5 & 3 \end{array}$$

- Siempre quedan «*en medio*» los dígitos del número y se deben sumar. Por eso, cuando la suma es mayor o igual a 10, debemos escribir el dígito de las unidades (de la suma) y sumar uno al dígito de las decenas para escribirlo en las centenas.
- Otra forma alternativa de realizar esta misma multiplicación consiste en agregar un cero a la derecha del número, que equivale a multiplicar por 10, y después sumar el número. En el caso del ejemplo anterior, tendremos:
$$11 \times 23 = 230 + 23$$
- La justificación de este procedimiento se da con la ley distributiva para los números reales:
$$11 \times 23 = 23 \times 11 = 23 \times (10 + 1) = 230 + 23$$

Con el procedimiento utilizado para multiplicar por 11, encuentra un método para multiplicar por 22, 33, etc.

Reto 1

Multiplicar por un número entre 12 y 20 mentalmente.

Ejemplo 7

- Para realizar el cálculo mental de (13)(45) multiplicamos solamente por la cifra de las unidades del número entre 12 y 20, agregamos un cero al 45 y sumamos los resultados:
$$(13)(45) = 450 + 135 = 585$$
- La justificación de este procedimiento también está en la ley distributiva:
$$(13)(45) = (45)(13) = (45)(10 + 3) = (45)(10) + (45)(3)$$
- Al multiplicar (45)(10) estamos agregando un cero a la derecha del número 45, y a este resultado le sumamos (45)(3).
- En general, si vamos a multiplicar el número a por $10 + k$, aplicamos de nuevo la ley distributiva y obtenemos:
$$(10 + k)(a) = (10)(a) + (k)(a)$$
- Ahora debes deducir un método como el que se explica en la multiplicación por 11, donde acomodes los números para sumarlos.

Multiplicar por 15 mentalmente.

Ejemplo 8

- La multiplicación por 15 es muy sencilla: agregamos un cero al otro factor y después sumamos la mitad del número que obtuvimos.

- Por ejemplo, para multiplicar (15)(37), agregamos un cero al 37 y obtenemos 370, después sumamos a este número su mitad, es decir, 185. Entonces,

$$(15)(37) = 370 + 185 = 555$$

- Lo que justifica este procedimiento consiste en que al agregar un cero al otro factor (37 en este caso), equivale a haberlo multiplicado por 10.

- Cuando calculamos la mitad de este número, en realidad estamos calculando el resultado de multiplicar el factor (37) por cinco, porque:

$$\frac{(37)(1\cancel{0})}{\cancel{2}} = (37)(5)$$

- Entonces, si necesitamos multiplicar el número k por 15, agregamos un cero a la derecha del número k, y a ese resultado le sacamos mitad.

- Sumamos estos dos últimos números y terminamos.

Ejemplo 9 Multiplicar por un número que termina en 9 mentalmente.

- Como es muy fácil multiplicar por un número que es múltiplo de 10, cuando debemos multiplicar por un número que termina en 9, es muy buena idea sumar 1 a ese número, realizar la multiplicación y después restar el otro factor.

- Esto porque:

$$m \cdot (10\,k + [9]) = m \cdot (10\,k + [10 - 1]) = m \cdot (10(k+1) - 1) = 10(k+1)\,m - m$$

  donde hemos aplicado la ley distributiva para los números.

- Por ejemplo,

$$(29)(47) = (30)(47) - 47 = (3)(470) - 47 = 1\,410 - 47 = 1\,363$$

- Ahora explica (utilizando la ley distributiva) la justificación de este procedimiento.

Ejemplo 10 Multiplicar por 50 mentalmente.

- Por ejemplo, multiplicar 17×50.

- Es muy sencillo multiplicar por 100, pues solamente agregamos dos ceros a la derecha del otro factor.

- Sabemos que $(2)(50) = 100$, entonces, para multiplicar por 50, basta hacer:

$$(17)(50) = (17)(50) \cdot \left(\frac{2}{2}\right) = (17) \cdot \left(\frac{100}{2}\right) = \frac{1\,700}{2} = 850$$

Ejemplo 11 Dividir por 5 mentalmente.

- Dado que dividir por 10 significa correr el punto decimal un lugar a la izquierda, y que $10 = (2)(5)$, mejor multiplicamos por 2 y al resultado le corremos el punto decimal un lugar a la izquierda.

- Por ejemplo,

$$\frac{37}{5} = (37)\left(\frac{1}{5}\right) = (37)\left(\frac{2}{10}\right) = \frac{(37)(2)}{10} = \frac{74}{10} = 7.4$$

- La justificación del procedimiento para dividir por 5 es similar al truco anterior.

- Supongamos que queremos dividir al número k entre 5. Es decir, queremos encontrar:

$$\frac{k}{5} = \frac{2 \cdot k}{10}$$

- Esta expresión indica: «*Duplica al dividendo (es decir, el numerador de la fracción) y al resultado córrele el punto decimal un lugar a la izquierda.*»

Encuentra un procedimiento para multiplicar cualquier número por un divisor de 100 mentalmente. **Reto 2**

Para resolver el reto puedes tomar algunas ideas del ejemplo donde se explica cómo multiplicar por 50.

Observa cómo puedes generalizar esta idea para los demás divisores de 100.

1.4.2 Series y sucesión lineal

En la naturaleza muchas veces aparecen las sucesiones de números.

Por ejemplo, cuando el hombre tuvo la necesidad de contar, tuvo que inventar un conjunto de números que le sirviera para ese propósito.

El conjunto de los números naturales es una sucesión: $1, 2, 3, 4, 5, \cdots$.

Sucesión **Definición 1**
Es una lista de números tales que pueden encontrarse uno a uno a través de una regla. Cada uno de los números que forma la sucesión se conoce como término de la sucesión.

Por ejemplo, los números: $2, 4, 6, 8, 10, \cdots$ forman una sucesión. Para encontrar el siguiente número sumamos dos al que tenemos por último término. En este caso tenemos la sucesión de los números pares.

También podemos formar la sucesión de los números impares de manera semejante: $1, 3, 5, \cdots$.

Existen muchos tipos de sucesiones. Por ejemplo, la sucesión: 5, 11, 17, 23, 29, etc. podemos calcular el siguiente número sumando 6 al último término.

Observa que una sucesión siempre tiene un primer término. Supongamos que ese primer término es el número a_1. En el ejemplo anterior $a_1 = 5$.

Para encontrar el siguiente término sumamos un número que no cambia de término a término, es decir, es constante. En el ejemplo anterior sumábamos el número 6, pero para hacer el caso general, vamos a considerar que sumamos el número d. Entonces, los siguientes términos serán:

En el ejemplo:

$$\begin{aligned}
a_2 &= 5+6\\
a_3 &= a_2+d\\
&= (5+6)+6=5+2(6)\\
a_4 &= a_3+d\\
&= (5+2(6))+6=5+3(6)\\
a_5 &= a_4+d\\
&= (5+3(6))+6=5+4(6)
\end{aligned}$$

En general:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1+d\\
a_3 &= a_2+d\\
&= (a_1+d)+d=a_1+2d\\
a_4 &= a_3+d\\
&= (a_1+2d)+d=a_1+3d\\
a_5 &= a_4+d\\
&= (a_1+3d)+d=a_1+4d
\end{aligned}$$

y en general:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Definición 2

SUCESIÓN ARITMÉTICA

Es una sucesión que cumple con que cualesquiera dos términos consecutivos tienen una diferencia constante. El primer término de una sucesión aritmética se denota por a_1, la diferencia constante de cualesquiera dos términos consecutivos por d, y el $n-$ésimo término por a_n.

Para encontrar el $n-$ésimo término, utilizamos la siguiente fórmula:

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

Ejemplo 1

Las siguientes son ejemplos de sucesiones aritméticas:

- $\Rightarrow$ $1,3,5,7,9,11,\cdots$
  donde el primer término es $a_1 = 1$ y la diferencia constante entre cualesquiera dos términos consecutivos es $d = 2$.

- $\Rightarrow$ $3,7,11,15,19,\cdots$
  donde $a_1 = 3$ y $d = 2$

- $\Rightarrow$ $7,10,13,16,19,22,\cdots$
  donde $a_1 = 7$ y $d = 3$.

Para verificar que la sucesión es aritmética podemos elegir cualesquiera dos términos consecutivos a_m, a_{m+1} y encontrar su diferencia: $a_{m-1} - a_m = d$.

Si esta diferencia cambia con distintos pares de términos consecutivos, entonces, la sucesión no es aritmética.

Ejemplo 2

Encuentra el término a_{12} de la sucesión aritmética definida con $a_1 = 5$ y $d = 6$

- Para resolver este ejercicio utilizaremos la fórmula:

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

- En este caso $a_1 = 5$, $n = 12$, y $d = 6$. Al sustituir los valores en la fórmula obtenemos:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + d\,(n-1) \\ a_{12} &= 5 + 6(12-1) \\ &= 5 + (6)(11) \\ &= 5 + 66 \\ &= 71 \end{aligned}$$

- Entonces $a_{12} = 71$.
- Puedes verificar el resultado encontrando todos los términos desde a_1 hasta a_{12}. Para esto tendrás que sumar $d = 6$ a cada término para encontrar el siguiente.

En la vida diaria encontramos muy frecuentemente oportunidades de aplicar las sucesiones aritméticas.

Ejemplo 3

Natalia hizo el compromiso de leer dos páginas más cada día del libro «*José Patter Prospectus*» . El primer día pudo leer 5 páginas. ¿Cuántas páginas debía leer el décimo día?

- En este caso tenemos que ella lee 2 páginas más del libro cada día, con lo que $d = 2$.
- También sabemos que el primer día leyó 5 páginas, así que $a_1 = 5$.
- Nos piden encontrar a_{10}, es decir, cuántas páginas leyó el décimo día de lectura.
- Sustituimos los valores conocidos en la fórmula:

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + d\,(n-1) \\ a_{10} &= 5 + 2(10-1) \\ &= 5 + (2)(9) \\ &= 5 + 18 \\ &= 23 \end{aligned}$$

- Esto significa que debe leer 23 páginas el décimo día de lectura.

Una pregunta que podemos hacer en este punto es: «*¿cuántas páginas ha leído Natalia en sus primeros 10 días de lectura?*»

Para responder esa pregunta debemos sumar los primeros diez términos de esa sucesión aritmética.

La serie es la suma de los términos de una sucesión. Cuando estamos hablando de una serie finita, estamos considerando un número finito de términos. Cuando consideramos una serie infinita, consideramos un número infinito de términos.

Utilizando el método de Gauss, tenemos:

$$\begin{array}{ccccccccc} S & = & 5 & + & 7 & + & \cdots & + & 23 \\ S & = & 23 & + & 21 & + & \cdots & + & 5 \\ \hline 2S & = & 28 & + & 28 & + & \cdots & + & 28 \end{array}$$

Como estamos sumando 10 términos, $28 + 28 + \cdots + 28 = 280$. Pero este valor es igual al doble de la suma que buscamos, entonces, $S = 280/2 = 140$. Es decir, en los primeros 10 días de lectura avanzó 140 páginas de su libro.

De manera semejante podemos encontrar de una manera sencilla la fórmula para calcular la suma de los primeros k términos de una sucesión aritmética:

$$\begin{array}{rcccccccc} S & = & a_1 & + & [a_1+d] & + & \cdots & + & a_k \\ S & = & a_k & + & a_{k-1} & + & \cdots & + & a_1 \\ \hline 2S & = & [a_1+a_k] & + & [a_1+a_k] & + & \cdots & + & [a_1+a_k] \end{array}$$

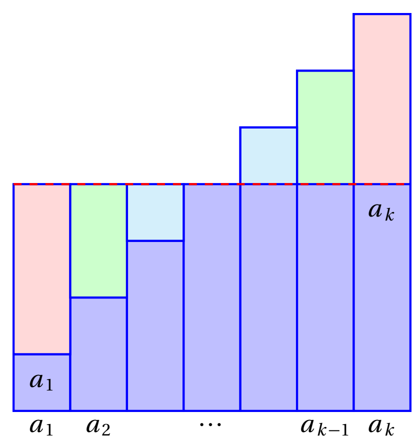
Observa que $a_{k-1} = a_k - d$, porque $a_k = a_{k-1} + d$, es decir, al término a_{k-1} le sumamos la diferencia d para obtener a_k.

Entonces, al sumar $2S$ estamos en realidad sumando k veces el número $a_1 + a_k$, y esto es igual a: $k(a_1 + a_k)$. Pero no deseamos encontrar el valor de $2S$, sino el valor de S.

Así que sacamos la mitad de $2S$ y así terminamos:

$$S = \frac{k(a_1 + a_k)}{2} = k\left(\frac{a_1 + a_k}{2}\right)$$

Ahora, $a_1 + a_k$ dividido entre dos es el promedio del primer y el k-ésimo térmimos. Geométricamente podemos imaginar que «*lo que le falta*» al término a_1 para llegar al promedio $(a_1+a_k)/2$, se lo proporciona el término a_k:



Una manera más de mostrar este resultado es la siguiente: si sumamos los términos de la sucesión, desde a_1 hasta a_k, obtenemos:

$$\begin{aligned} S_k &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k \\ S_k &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + d(k-1)) \end{aligned}$$

Pero como cada uno de los k términos contiene al término a_1, podemos separar esta parte escribiendo:

$$S_k = k \cdot a_1 + d \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1))$$

Ahora consideramos la suma: $1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1)$, la cual se conoce como la suma de Gauss, la cual se estudia con detalle en la página 10. Usando la fórmula de la suma de Gauss, obtenemos:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k-1) = \frac{(k-1)k}{2}$$

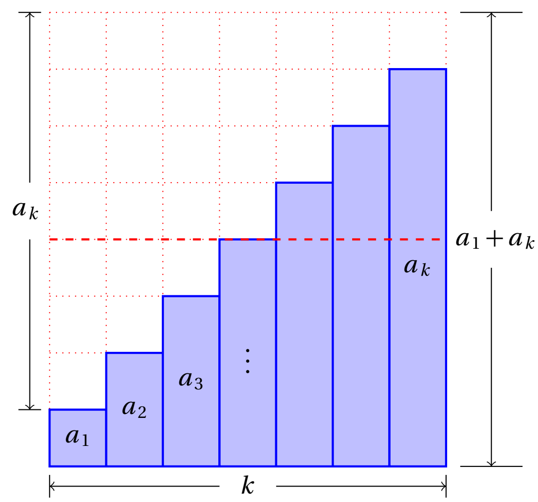
Sustituyendo este resultado obtenemos:

$$\begin{aligned} S_k &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + d(k-1)) \\ &= k \cdot a_1 + d \cdot \frac{(k-1)k}{2} \end{aligned}$$

Ahora vemos que podemos factorizar el número k:

$$\begin{aligned} S_k &= k\cdot a_1 + d\cdot\frac{(k-1)\,k}{2} \\ &= k\cdot\left(\frac{2\,a_1+d\,(k-1)}{2}\right) \\ &= k\cdot\left(\frac{a_1+[a_1+d\,(k-1)]}{2}\right) \\ &= k\cdot\left(\frac{a_1+a_k}{2}\right) \end{aligned}$$

Podemos generar una interpretación geométrica de este resultado. En ella, la altura de cada rectángulo *unitario* será de d unidades de altura.



Ahora observa la fórmula para encontrar la serie:

$$a_1+(a_1+d)+(a_1+2\,d)+\cdots+(a_1+d(n-1)) = k\cdot\left(\frac{a_1+a_k}{2}\right)$$

Encontramos la suma multiplicando el número de términos (k) por el promedio del primer y último términos. Geométricamente esto significa que tomamos la mitad, bien en forma de diagonal, como formando escalones, o bien , dividiendo en dos el rectángulo, exactamente a la mitad de la altura del mismo.

SERIE ARITMÉTICA
Es la suma de varios términos consecutivos de una sucesión aritmética.
La fórmula para encontrar la serie aritmética de los primeros n términos de la sucesión definida por a_1, d, es:

$$S_n = \frac{n\,(a_1+a_n)}{2}$$

Definición 3

Para encontrar la suma aritmética de los primeros n términos de una sucesión necesitamos conocer: el número de términos que vamos a sumar (es decir, n), el primer término a_1 y el último término que queremos sumar a_n.

Si conocemos a_1 y d es muy fácil calcular a_n.

Calcula la suma de Gauss usando la fórmula para la serie aritmética. **Ejemplo 4**

- Si recuerdas, Gauss calculó mentalmente la suma:

$$1+2+3+4+5+6+\cdots+99+100$$

- En este caso, el primer término es: $a_1 = 1$,
- ... la diferencia constante entre dos cualesquiera términos consecutivos es: $d = 1$, y
- ... el último término, es: $a_{100} = 100$.
- Ahora sustituimos los valores en la fórmula:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{n(a_1+a_n)}{2} \\
S_{100} &= \frac{100(1+100)}{2} \\
&= \frac{\cancel{100}\times 101}{\cancel{2}} \\
&= 50\times 101 \\
&= 5050
\end{aligned}$$

- Con lo que Gauss utilizó esta fórmula, sin saberlo, tal vez.

Las series aritméticas, al igual que las sucesiones aritméticas, sirven para resolver problemas cotidianos.

El significado que tiene cada uno de los términos de la sucesión dependen del contexto del problema que vamos a resolver.

Ejemplo 5

En la construcción de una barda en forma de pirámide para la exposición Maya de el Foro Universal de las Culturas Monterrey 2008, se utilizaron 1200 piedras para la fila de la base, 1150 para la fila que estaba encima, 1100 para la siguiente fila, y así sucesivamente, hasta que la fila de piedras más alta utilizó 500 piedras. ¿Cuántas piedras se utilizaron en total?

- En este caso, cada fila utilizaba 50 piedras menos que la anterior, esto nos indica que la diferencia es negativa e igual a: $d = -50$
- También se nos da a conocer el primer término, en este caso, el número de piedras de la fila de la base de la barda, que es: $a_1 = 1200$.
- No conocemos n, pero sí conocemos el valor de a_n, es decir, el número de piedras de la fila de piedras más alta, en este caso, $a_n = 500$
- a partir de esta información podemos empezar encontrando el valor de n:

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + d(n-1) \\
500 &= 1200 - 50(n-1) \\
500 - 1200 &= -50(n-1) \\
-700 &= -50(n-1) \\
\frac{-700}{-50} &= n-1 \qquad \Rightarrow \\
14 &= n-1 \\
14+1 &= n = 15
\end{aligned}$$

- Esto nos dice que la barda tenía 15 filas de piedras.
- Ahora sí podemos encontrar el número total de piedras que se utilizaron en la construcción de la barda:

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{n(a_1+a_n)}{2}\\
S_{15} &= \frac{15(1200+500)}{2} = \frac{15\times\cancel{1700}}{\cancel{2}}\\
&= 15\times 850 = 12\,750
\end{aligned}$$

- Es decir, se utilizaron, 12 750 piedras en la construcción de esa barda en forma de pirámide.

Resuelve cada uno de los siguientes ejercicios. **Ejercicios 1.4.2**

1) Dada la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 7$, $d = 5$, encuentra a_{100}. $a_{100} = 502$
2) Dada la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 3$, $d = 7$, encuentra S_{20}. $S_{20} = 1\,390$
3) Encuentra la suma de los primeros 25 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 1\,100$, $d = -15$. $S_{25} = 23\,000$
4) Encuentra la suma de los primeros 100 términos de la sucesión aritmética definda por: $a_1 = 12$, $d = 5$. $S_{100} = 25\,950$
5) Encuentra la suma de los primeros 100 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 17, d = -5$. $S_{100} = -23050$
6) Encuentra la suma de los primeros 90 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 6, d = 3$. $S_{90} = 12555$
7) Encuentra la suma de los primeros 30 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 92, d = 7$. $S_{30} = 5805$
8) Encuentra la suma de los primeros 30 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 43, d = -3$. $S_{30} = -15$
9) Encuentra la suma de los primeros 20 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 61, d = 1$. $S_{20} = 1410$
10) Encuentra la suma de los primeros 100 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 87, d = -1$. $S_{100} = 3750$
11) Encuentra la suma de los primeros 40 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 90, d = 4$. $S_{40} = 6720$
12) Encuentra la suma de los primeros 90 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 35, d = -9$. $S_{90} = -32895$
13) Encuentra la suma de los primeros 90 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 5, d = 2$. $S_{90} = 8460$
14) Encuentra la suma de los primeros 80 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 16, d = 2$. $S_{80} = 7600$

15) Encuentra la suma de los primeros 80 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 12, d = 7$.
$S_{80} = 23080$

16) Encuentra la suma de los primeros 40 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 56, d = 11$.
$S_{40} = 10820$

17) Encuentra la suma de los primeros 70 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 19, d = 7$.
$S_{70} = 18235$

18) Encuentra la suma de los primeros 70 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 43, d = 1$.
$S_{70} = 5425$

19) Encuentra la suma de los primeros 10 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 96, d = -9$.
$S_{10} = 555$

20) Encuentra la suma de los primeros 60 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 95, d = -6$.
$S_{60} = -4920$

21) Encuentra la suma de los primeros 70 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 49, d = -5$.
$S_{70} = -8645$

22) Encuentra la suma de los primeros 80 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 77, d = 4$.
$S_{80} = 18800$

23) Encuentra la suma de los primeros 90 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 10, d = 3$.
$S_{90} = 12915$

24) Encuentra la suma de los primeros 20 términos de la sucesión aritmética definida por: $a_1 = 19, d = 10$.
$S_{20} = 2280$

25) En un concierto se permitió la entrada al estadio por todas las puertas de acceso de manera gratuita. Después de las 11:00 p.m. se permitió el acceso solamente con boleto, y entraban 300 personas por minuto. Si a las 11:00 de la noche ya había dentro del estado 1 200 personas, y permitieron la entrada hasta las 12:00 p.m. ¿Cuántas personas asistieron a ese concierto? 19 200 personas.

26) Un inversionista propone una utilidad del 2% inicial con un incremento del 0.05% anual. ¿Cuántos años deben pasar para que tenga una utilidad del 3%? 21 años.

27) El inicio de una canción incrementa su volumen desde cero decibeles (db) hasta 75 db. Cada décima parte de segundo aumenta 3 decibeles. ¿Cuántos segundos tarda en alcanzar el máximo volumen esa canción? 26 segundos.

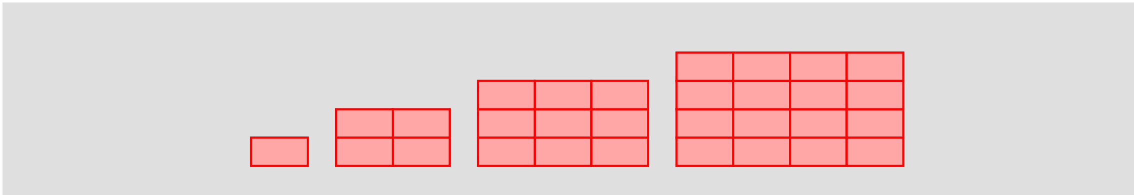
28) Un editor de libros sabe que cada uno de los libros de física para secundaria tiene una masa de 1.35 kg. La caja que los contiene para el envío tiene una masa de 2.5 kg. Escribe a_0, d, a_n y a_{25} si la sucesión aritmética representa la masa de la caja con n libros. $a_0 = 2.5$, $d = 1.35$, $a_n = a_0 + 1.35\,n$, $a_{25} = 36.25$.

29) En el ejercicio anterior, ¿qué representa a_0? La masa de la caja que contendrá a los libros.

30) El gas doméstico (L.P.) ha incrementado su precio por kilogramo en $0.25 pesos cada mes. El precio de hace un año era de $6.75 pesos. ¿Cuál es el precio actual? $9.50 pesos/kg.

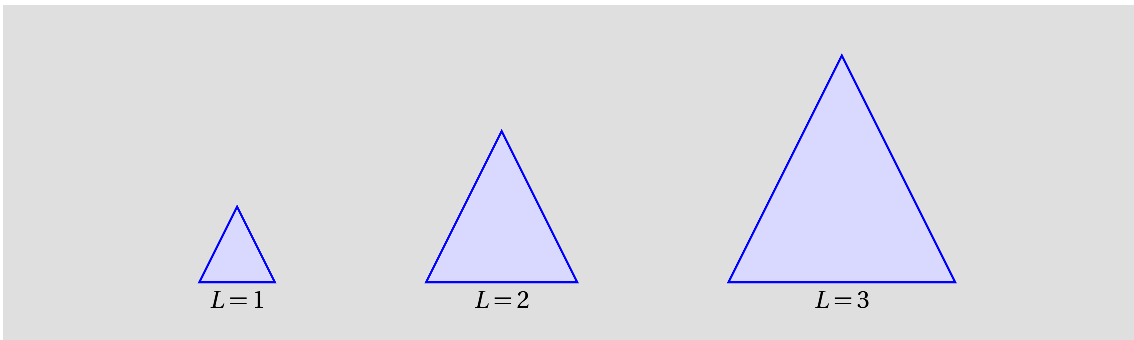
31) Benjamín se sometió a una dieta rigurosa que le permitió bajar 250 gramos por mes. Hace un año y un mes (25 meses), cuando empezó la dieta, él pesaba 85 kg. ¿Cuánto pesa actualmente? 79 kg.

32) Las siguientes columnas de blocks de 25 cm × 12.5 cm se hicieron en un local donde se realizaba una construcción:



¿Cuánto suman los perímetros de las figuras así formadas? 15 cm.

33) Calcula la longitud de estambre que se requiere para marcar en los bordes los primeros 10 triángulos de la siguiente figura:



donde L representa la longitud en centímetros del lado de cada triángulo. (En esta figura se muestran los primeros tres triángulos.) 165 cm

Para los siguientes ejercicios, calcula el valor de S

a) Utilizando el método de Gauss.

b) Utilizando la fórmula para la serie aritmética.

Comentario

34) $S =$ 252 500.

$$S = 5 + 7 + 9 + \cdots + 1005$$

35) $S =$ 142 300.

$$S = 15 + 22 + 29 + \cdots + 1\,408$$

36) $S =$ 62 625.

$$S = \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\right) + \cdots + 500\left(\frac{1}{2}\right)$$

37) $S =$ 375 375.

$$S = \frac{3}{4} + 2\left(\frac{3}{4}\right) + 3\left(\frac{3}{4}\right) + 4\left(\frac{3}{4}\right) + \cdots + 1\,000\left(\frac{3}{4}\right)$$

Capítulo 2

Polinomios de una variable

Por aprender...

Por qué es importante...

En esta unidad estudiaremos los objetos matemáticos que más frecuentemente encontraremos en la resolución de problemas a lo largo del curso, así como sus propiedades más básicas.

2.1 PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

El álgebra es la rama de las matemáticas que se dedica al estudio de las propiedades de objetos matemáticos.

Un objeto matemático puede ser un número, una ecuación, un vector, etc.

Por ejemplo, para el álgebra de los números, tenemos un conjunto de objetos, en este caso, los números, y el álgebra lo que hará es buscar y encontrar todas las propiedades de ese conjunto de números.

La igualdad es una relación que se define entre números.

Las tres propiedades más importantes de la igualdad se resumen en una estructura matemática que se conoce como relación de equivalencia.

RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

La relación de equivalencia se define con las siguientes propiedades:

Reflexiva: $a = a$.
 Ejemplo: $5 = 5$.

Simétrica: *Si* $a = b$, *entonces,* $b = a$.
 Ejemplo: *Si* $x = 2$, *entonces,* $2 = x$.

Transitiva: *Si* $a = b$, *y* $b = c$, *entonces,* $a = c$.
 Ejemplo: *Si* $x = 2$, *y* $2 = w$, *entonces,* $x = w$.

Definición 4

Las propiedades de la igualdad nos ayudan a justificar los métodos que usaremos para resolver problemas.

Por ejemplo, la propiedad reflexiva en palabras dice: «*un número siempre es igual a sí mismo*». En un contexto familiar, podemos decir: *yo siempre tengo mi propia edad*.

La propiedad simétrica en palabras dice: «*Si un número es igual a otro, el segundo debe ser igual al primero*». En el mismo contexto, podemos decir: *Si Alicia tiene la misma edad que Berenice, entonces Berenice tiene la misma edad que Alicia*.

La propiedad transitiva en palabras dice: «*Si un primer número es igual a otro segundo número, y además, el segundo número es igual a otro tercer número, entonces el tercer número y el primer número deben ser iguales*». En el contexto de las edades esto se aplica así: *Si Alicia tiene la misma edad que Berenice, y Berenice tiene la misma edad que Claudia, entonces, Alicia y Claudia tienen la misma edad.*

Sin embargo, esas propiedades no son todas las que posee la igualdad.

Definición 5

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD

Además de las propiedades que se mencionan en la relación de equivalencia, la igualdad presenta las siguientes:

Para la suma: *Si* $a = b$*, entonces,* $a + c = b + c$*.*
 Ejemplo: *Si* $x = 5$*, entonces,* $x + 3 = 5 + 3$*.*

Para la resta: *Si* $a = b$*, entonces,* $a - c = b - c$*.*
 Ejemplo: *Si* $x = 5$*, entonces,* $x - 3 = 5 - 3$*.*

Para la multiplicación: *Si* $a = b$*, entonces,* $a\,c = b\,c$*.*
 Ejemplo: *Si* $x = 5$*, entonces,* $7\,x = (7)(5)$*.*

Para la división: *Si* $a = b$*, entonces,* $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$*.* $(c \neq 0)$
 Ejemplo: *Si* $x = 5$*, entonces,* $\frac{x}{7} = \frac{5}{7}$*.*

Para la potencia: *Si* $a = b$*, entonces,* $a^n = b^n$*.*
 Ejemplo: *Si* $x = 5$*, entonces,* $x^2 = 5^2$*.*

Para la raíz: *Si* $a = b$*, entonces,* $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$*.*
 Ejemplo: *Si* $x = 5$*, entonces,* $\sqrt{x} = \sqrt{5}$*.*

✓ La propiedad para la suma, nos dice en palabras que al sumar un mismo número en ambos lados de una igualdad, obtenemos una nueva igualdad válida.

✓ La propiedad para la resta, nos dice que al restar un mismo número en ambos lados de una igualdad, obtenemos otra igualdad válida.

✓ La propiedad para la multiplicación, nos dice en palabras que si multiplicamos ambos lados de la igualdad por un número real, obtenemos otra nueva igualdad válida.

✓ La propiedad para la división, nos dice que si dividimos ambos lados de la igualdad por un número real (distinto de cero), obtenemos otra nueva igualdad válida.

✓ La propiedad de la igualdad para la potencia indica que, si elevamos a la misma potencia ambos lados de una igualdad, ésta se sigue cumpliendo.

✓ La propiedad de la igualdad para la raíz nos dice que si calculamos la raíz n-ésima en ambos lados de una igualdad (si esta operación es posible de realizar), la igualdad sigue siendo válida. Por ejemplo puede ocurrir que obtengas:

$$3\,x + 1 = -5$$

y desees calcular la raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad. En este caso NO podemos aplicar esa propiedad, porque no es posible calcular la raíz cuadrada de -5 (por ahora[1]).

Para puedas entender mejor lo anterior, tenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6 Identifica la propiedad que se ilustra en cada caso.

- Si $x = y$, entonces, $x + 2 = y + 2$ .... para la suma
- Si $a = 4$, entonces, $a + 2 = 4 + 2$ .... para la suma

[1]Al final del curso sabrás cómo calcularla.

- Si $m = 6$, entonces, $2 \cdot m = 2 \cdot 6$ .... para la mult
- Si $u = v$ y $v = w$, entonces, $u = w$ .... transitiva
- Si $p = 11 + q$, entonces, $p - 11 = 11 + q - 11$ .... para la resta
- Si $2\,m = r$, entonces, $\dfrac{2\,m}{2} = \dfrac{r}{2}$ .... para la div

---

Este tema es muy importante y también muy sencillo.

Probablemente, ya conocías todas las propiedades que se mencionaron, porque son muy evidentes.

En la siguiente solución de la ecuación $2x + 5 = 21$, indica la propiedad de la igualdad que se utilizó. **Ejemplo 7**

- Escribe a la izquierda la propiedad utilizada.
- $2x + 5 - 5 = 21 - 5$ .... para la resta
- $2x = 16$
- $\dfrac{2x}{2} = \dfrac{16}{2}$ .... para la div
- $x = 8$
- No te preocupes por entender los pasos que se dieron para la solución de la ecuación anterior.
- Por ahora debes concentrarte en reconocer cada una de las propiedades de la igualdad.

Las propiedades de la igualdad se utilizarán en la mayoría de los procedimientos que utilizaremos para resolver ecuaciones y otros problemas relacionados con álgebra, por ejemplo, el despeje.

El siguiente procedimiento se conoce como un despeje. En este caso se despeja la variable v_f de la fórmula:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t}$$

Indica en cada paso la propiedad de la igualdad que se está aplicando. **Ejemplo 8**

- Escribe a la derecha de las ecuaciones que tienen puntos la propiedad que corresponde.
- $a = \dfrac{v_f - v_i}{t}$
- $a \cdot t = \left(\dfrac{v_f - v_i}{t}\right) \cdot t$ .... para la mult
- $a \cdot t = v_f - v_i$
- $a \cdot t + v_i = v_f - v_i + v_i$ .... para la suma
- $a \cdot t + v_i = v_f$
- $v_f = a \cdot t + v_i$ .... transitiva

- Como puedes ver, el despeje puede justificarse con las propiedades de la igualdad.
- No te preocupes por entender el despeje por ahora.
- Por ahora, solamente debes concentrar tu aprendizaje en las propiedades de la igualdad.

Ejemplo 9 Indica en cada paso del siguiente despeje la propiedad de la igualdad que se está aplicando.

- Escribe a la derecha la propiedad que corresponde a cada paso del despeje:
- $F = G \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$
- $F \cdot r^2 = G \cdot \left(\dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\right) \cdot r^2$ .... para la mult
- $F \cdot r^2 = G \cdot m_1 \cdot m_2$
- $\dfrac{F \cdot r^2}{F} = \dfrac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{F}$ .... para la div
- $r^2 = \dfrac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{F}$
- $\sqrt{r^2} = \sqrt{\dfrac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{F}}$ .... para la raíz
- $r = \sqrt{\dfrac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{F}}$
- Concéntrate solamente en las propiedades de la igualdad.
- Lo demás lo aprenderás más adelante.

En realidad, las propiedades de la igualdad y de los números sirven para justificar por qué utilizamos los procedimientos que usamos en álgebra y al entenderlos, podrás ver más ayá de las letras escritas en este material, pues entenderás por qué podemos realizar una operación en un procedimiento.

Por ahora, debes entender cómo podemos modificar expresiones que están igualadas.

2.2 Problemas geométricos y algebraicos

Aquí empezamos a estudiar los conceptos que más vamos a utilizar en los cursos de matemáticas.

Los temas de esta unidad son los conceptos de álgebra que no debes olvidar.

2.2.1 Reglas de los exponentes

En el álgebra, uno de los temas que más utilizaremos para simplificar expresiones algebraicas son las reglas de los exponentes.

Definición 1

Leyes de los exponentes

Ley	***Ejemplo***
(i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	*(i)* $x^5 \cdot x^3 = x^{5+3} = x^8$
(ii) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	*(ii)* $\dfrac{q^9}{q^4} = q^{9-4} = q^5$
(iii) $\dfrac{1}{a^m} = a^{-m}$	*(iii)* $\dfrac{1}{r^5} = r^{-5}$
(iv) $a^0 = 1 \qquad (a \neq 0)$	*(iv)* $19^0 = 1$
(v) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	*(v)* $(m^3)^5 = m^{3 \cdot 5} = m^{15}$
(vi) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	*(vi)* $(u \cdot v)^7 = u^7 \cdot v^7$
(vii) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$	*(vii)* $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3 = \dfrac{x^3}{y^3}$

¿Por qué $x^5 \cdot x^3 = x^{5+3} = x^8$?

Primero debemos recordar qué significa x^3. El número 3 que está en el superíndice de la literal x nos indica que debemos multiplicar al número x por sí mismo 3 veces.

De manera semejante, la expresión: x^5 nos indica que debemos multiplicar el número x por sí mismo 5 veces. Entonces, al multiplicar:

$$x^5 \cdot x^3 = (\underbrace{x \cdot x \cdot x}_{\text{3 factores}}) \cdot (\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}_{\text{5 factores}})$$

Y en total terminamos multiplicando 8 veces el número x, por eso debemos sumar los exponentes:

$$x^5 \cdot x^3 = x^{5+3} = x^8$$

De manera semejante podemos justificar las demás leyes de los exponentes.

Por ejemplo, si consideramos el ejemplo dado para la segunda ley, tenemos:

$$\frac{q^9}{q^4} = q^{9-4} = q^5$$

lo que pasa es que en realidad tenemos:

$$q^9 = \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q}_{\text{9 factores}} \qquad \text{y también,} \qquad q^4 = \underbrace{q \cdot q \cdot q \cdot q}_{\text{4 factores}}$$

por eso:

$$\frac{q^9}{q^4} = \frac{q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q}{q \cdot q \cdot q \cdot q}$$

De las 9 q's que aparecen en el numerador de la fracción, 4 de esas se «*cancelan*» con las que aparecen en el denominador:

$$\begin{aligned}
\frac{q^9}{q^4} &= \frac{\cancel{q} \cdot \cancel{q} \cdot \cancel{q} \cdot \cancel{q} \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q}{\cancel{q} \cdot \cancel{q} \cdot \cancel{q} \cdot \cancel{q}} \\
&= \frac{q \cdot q \cdot q \cdot q \cdot q}{1} \\
&= q^5
\end{aligned}$$

y por eso debemos restar los exponentes.

Considera ahora el caso cuando tenemos:

$$\frac{a^4}{a^4} \qquad\qquad a \neq 0$$

En este caso, si aplicamos la segunda ley de los exponentes, obtenemos:

$$\frac{a^4}{a^4} = a^{4-4} = a^0$$

Pero si $a \neq 0$, debemos poder hacer la división. Por ejemplo, supongamos que $a = 2$. Entonces, $a^4 = 2^4 = 16$. Y al sustituir este valor en la expresión anterior obtenemos:

$$\frac{a^4}{a^4} = \frac{2^4}{2^4} = \frac{16}{16} = 1 = a^0$$

Esta es la cuarta ley de los exponentes[2].

Para deducir la tercera ley de los exponentes, consideramos el caso cuando el exponente del denominador es mayor que el exponente del numerador. Por ejemplo:

$$\frac{a^4}{a^9} = a^{4-9} = a^{-5}$$

Pero si desarrollamos la expresión de acuerdo a la definición de potencia (como multiplicaciones abreviadas), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{a^4}{a^9} &= \frac{1 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} \\
&= \frac{1 \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a}}{\cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \cancel{a} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{\text{5 factores}}} \\
&= \frac{1}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} \\
&= \frac{1}{a^5}
\end{aligned}$$

Pero ambos resultados son equivalentes. Es decir,

$$\frac{1}{a^5} = a^{-5}$$

Así hemos obtenido la tercera ley de los exponentes.

[2] Por la propiedad de transitividad de la igualdad, $1 = a^0 \quad \Rightarrow \quad a^0 = 1$.

Debes observar que en realidad, la cuarta ley es un caso especial de la tercera ley de los exponentes.

Para justificar la quinta ley de los exponentes, basta aplicar la primera ley de los exponentes varias veces.

Por ejemplo, en el siguiente caso:

$$\left(x^4\right)^3 = x^4 \cdot x^4 \cdot x^4$$

Y ahora podemos aplicar la primera ley de los exponentes que nos dice: «*cuando dos factores tengan la misma base, suma los exponentes para encontrar el resultado*». En este caso debemos sumar: $4+4+4 = 3\times 4 = 12$.

Observa que se repite el sumando 4 un total de 3 veces. Por eso podemos multiplicar los exponentes al aplicar la segunda ley:

$$\left(x^4\right)^3 = x^4 \cdot x^4 \cdot x^4 = x^{(3)(4)} = x^{12}$$

Las siguientes (y últimas) dos leyes son muy sencillas de justificar. Para esto simplemente aplicamos la definición de potencia. Por ejemplo,

$$(5\,a)^3 = (5\,a)\cdot(5\,a)\cdot(5\,a) = 5\cdot 5\cdot 5\cdot a\cdot a\cdot a = 5^3\cdot a^3$$

De manera semejante, para la última ley, tenemos:

$$\left(\frac{5}{a}\right)^3 = \left(\frac{5}{a}\right)\cdot\left(\frac{5}{a}\right)\cdot\left(\frac{5}{a}\right) = \frac{5\cdot 5\cdot 5}{a\cdot a\cdot a} = \frac{5^3}{a^3}$$

Muchas de las expresiones más complejas y difíciles que te puedes imaginar, pueden fácilmente simplificarse a través de las reglas de los exponentes y otras herramientas algebraicas que aprenderemos más adelante.

No importa qué tan compleja se vea una expresión, es casi seguro que hay alguna forma de expresarla de una manera equivalente, pero mucho más sencilla.

El procedimiento que se utiliza en esas expresiones muy complejas es exactamente el mismo que se utiliza con los ejemplos que se dan en la definición.

Evidentemente, algunas veces tendremos que aplicar varias reglas de los exponentes simultáneamente, o algunas otras propiedades de las expresiones algebraicas.

Simplifica:

$$\left(t^5\,r^3\,s^7\right)^2 =$$

Ejemplo 1

- En este caso, basta aplicar la ley *(v)* de los exponentes:

$$\begin{aligned}\left(t^5\,r^3\,s^7\right)^2 &= t^{5\cdot 2}\,r^{3\cdot 2}\,s^{7\cdot 2}\\ &= t^{10}\,r^6\,s^{14}\end{aligned}$$

Simplifica:

$$\frac{x^2\,y^5}{x^3\,y} =$$

Ejemplo 2

- Empezamos aplicando la ley *(ii)* de los exponentes:

$$\begin{aligned}\frac{x^2\,y^5}{x^3\,y} &= x^{2-3}\,y^{5-1}\\ &= x^{-1}\,y^4\\ &= \frac{y^4}{x}\end{aligned}$$

En el álgebra, como en cualquier otra cosa, aprendes mejor las reglas mientras más las practiques.

Así que la recomendación es que trates de justificar cada paso de la solución de cada ejemplo para que comprendas por qué se realiza de esa manera.

Es muy recomendable que resuelvas todos los ejercicios de tarea que se incluyen al final de cada tema para que adquieras destreza en la resolución de los mismos.

Ejemplo 3

Simplifica:

$$\frac{m^{-1}\,n^5\,w^6}{m^7\,v^{-6}\,w} =$$

- En este caso empezamos convirtiendo todos los exponentes negativos en positivos, aplicando la ley *(iii)*:

$$\begin{aligned}\frac{m^{-1}\,n^5\,w^6}{m^7\,n^{-6}\,w} &= \frac{n^5\,w^6\,n^6}{m^7\,w\,m}\\ &= \frac{n^{5+6}\,w^{6-1}}{m^{7+1}}\\ &= \frac{n^{11}\,w^5}{m^8}\end{aligned}$$

Ejemplo 4

Simplifica:

$$\left(\frac{a^4\,b^7\,c^{12}}{a^7\,b^5\,c^8}\right)^3 =$$

- En este caso, tenemos que aplicar simultáneamente varias leyes.
- Empezamos simplificando la fracción que está dentro de los paréntesis:

$$\begin{aligned}\left(\frac{a^4\,b^7\,c^{12}}{a^7\,b^5\,c^8}\right)^3 &= \left(a^{4-7}\,b^{7-5}\,c^{12-8}\right)^3\\ &= \left(a^{-3}\,b^2\,c^4\right)^3\end{aligned}$$

- Ahora expresamos todos los exponentes negativos como positivos aplicando la ley *(iii)*:

$$\left(a^{-3}\,b^2\,c^4\right)^3 = \left(\frac{b^2\,c^4}{a^3}\right)^3$$

- Finalmente, vamos a aplicar las leyes *(v)* y *(vii)*

$$\left(\frac{b^2\,c^4}{a^3}\right)^3 = \frac{b^{2\cdot 3}\,c^{4\cdot 3}}{a^{3\cdot 3}} = \frac{b^6\,c^{12}}{a^9}$$

- Entonces,

$$\left(\frac{a^4\,b^7\,c^{12}}{a^7\,b^5\,c^8}\right)^3 = \frac{b^6\,c^{12}}{a^9}$$

¿Observas qué diferente se ven las dos expresiones, a pesar de que se trata de la misma?

Simplifica:

$$\left(\frac{x^5y^7}{z^2}\right)\left(\frac{z^7x^3}{y^4}\right)$$

Ejemplo 5

- Primero debemos multiplicar ambos factores y después simplificamos, aplicando las leyes de los exponentes en ambos casos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^5y^7}{z^2}\right)\left(\frac{z^7x^3}{y^4}\right) &= \frac{\left(x^5y^7\right)\left(z^7x^3\right)}{\left(z^2\right)\left(y^4\right)} \\
&= \frac{x^{5+3}y^7\cdot z^7}{z^2\cdot y^4} \\
&= x^8y^{7-4}z^{7-2} \\
&= x^8y^3z^5
\end{aligned}$$

- Entonces,

$$\left(\frac{x^5y^7}{z^2}\right)\left(\frac{z^7x^3}{y^4}\right) = x^8y^3z^5$$

- Identifica qué ley de los exponentes se aplicó en cada caso.

Algunas veces se requerirá aplicar la ley distributiva, como en el siguiente caso:

Desarrolla el siguiente producto:

$$7\,x^3\cdot\left(3\,x^2+5\,x^5\right)$$

Ejemplo 6

- Primero recordamos la ley distributiva para los números reales:

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$$

- Ahora aplicamos esta misma ley a la expresión que queremos desarrollar:

$$\begin{aligned}
7\,x^3\cdot\left(3\,x^2+5\,x^5\right) &= \left(7\,x^3\right)\left(3\,x^2\right)+\left(7\,x^3\right)\left(5\,x^5\right) \\
&= 21\,x^{3+2}+35\,x^{3+5} \\
&= 21\,x^5+35\,x^8
\end{aligned}$$

- Observa que empezamos multiplicando los números conocidos y después multiplicamos las literales, aplicando las leyes de los exponentes.

- Entonces, al desarrollar, obtenemos:

$$7\,x^3\cdot\left(3\,x^2+5\,x^5\right) = 21\,x^5+35\,x^8$$

Las leyes de los exponentes pueden generalizarse para incluir también a los radicales.

El siguiente ejemplo sugiere esta generalización.

Ejemplo 7

Considerando que:

$$\begin{aligned}\sqrt{4}\times\sqrt{4} &= 4\\ \sqrt{9}\times\sqrt{9} &= 9\\ \sqrt{25}\times\sqrt{25} &= 25\end{aligned}$$

Justifica por qué $\sqrt{x}=x^{1/2}$

- Dados los ejemplos, sabemos que si multiplicamos $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x$
- Ahora suponemos que $\sqrt{x}=x^k$.
- Lo que deseamos determinar es el valor de k.
- Para eso, vamos a utilizar las leyes de los exponentes.
- En particular, usaremos la primera ley de los exponentes:

$$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x^k\cdot x^k=x^{k+k}=x^{2k}$$

- Pero ya sabemos que $\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}=x^1$, entonces,

$$x^{2k}=x^1$$

- Y para que se cumpla la igualdad se requiere que $2k=1$.
- Esta última igualdad nos dice: «*pensé un número, lo multipliqué por 2 y obtuve como resultado 1. ¿Qué número pensé?*»
- Obviamente pensó $\frac{1}{2}$. Entonces,

$$x^{2k}=x^{2\times 0.5}=x^1$$

- y $\sqrt{x}=x^{1/2}$, supuesto que sea posible calcular la raíz del número x.

Entonces, podemos considerar a los radicales como exponentes fraccionarios.

También podemos utilizar el procedimiento anterior para mostrar que $\sqrt[3]{x}=x^{1/3}$, $\sqrt[4]{x}=x^{1/4}$, etc. Y como los radicales son exponentes, podemos aplicarles las leyes de los exponentes.

En otras palabras, las leyes de los exponentes también se aplican a los radicales.

Ejemplo 8

Simplifica la siguiente expresión:

$$\sqrt[4]{x^8y^{12}z^{20}}$$

- Para empezar, ya sabemos que $\sqrt[4]{a}=a^{1/4}$.

- Entonces, en lugar de escribir el signo de radical, podemos escribir en su lugar el exponente 1/4.

$$\sqrt[4]{x^8 y^{12} z^{20}} = \left(x^8 y^{12} z^{20}\right)^{1/4}$$

- Ahora podemos aplicar las leyes (*v*) y (*vi*) de los exponentes:

$$\begin{aligned}\left(x^8 y^{12} z^{20}\right)^{1/4} &= x^{8/4} y^{12/4} z^{20/4}\\ &= x^2 y^3 z^5\end{aligned}$$

- Entonces, al simplificar, obtenemos:

$$\sqrt[4]{x^8 y^{12} z^{20}} = x^2 y^3 z^5$$

Simplifica:

$$\sqrt[3]{\frac{m^4 n^7 w^{11}}{w^2 n^4 m}}$$

Ejemplo 9

- De nuevo, empezamos convirtiendo el signo radical en un exponente fraccionario:

$$\sqrt[3]{\frac{m^4 n^7 w^{11}}{w^2 n^4 m}} = \left(\frac{m^4 n^7 w^{11}}{w^2 n^4 m}\right)^{1/3}$$

- Ahora podemos aplicar las leyes de los exponentes.
- Empezamos simplificando lo que está dentro de los paréntesis:

$$\begin{aligned}\left(\frac{m^4 n^7 w^{11}}{w^2 n^4 m}\right)^{1/3} &= \left(m^{4-1} n^{7-4} w^{11-2}\right)^{1/3}\\ &= \left(m^3 n^3 w^9\right)^{1/3}\end{aligned}$$

- Y finalmente podemos aplicar las leyes (*v*) y (*vi*) de los exponentes:

$$\begin{aligned}\left(m^3 n^3 w^9\right)^{1/3} &= m^{3/3} n^{3/3} w^{9/3}\\ &= m^1 n^1 w^3\\ &= m\, n\, w^3\end{aligned}$$

- Por tanto,

$$\sqrt[3]{\frac{m^4 n^7 w^{11}}{w^2 n^4 m}} = m\, n\, w^3$$

Pero no siempre tendremos una solución así, de forma que todos los factores queden sin signo de radical. Algunas veces tendremos en el resultado signos de radical. Esto ocurrirá cuando uno de los exponentes del argumento del radical **no** sean múltiplos del índice del radical.

El siguiente ejemplo muestra uno de esos casos.

Simplifica:

$$\sqrt[4]{u^7 v^6 w^{11}}$$

Ejemplo 10

- Empezamos escribiendo el signo de radical como un exponente fraccionario:

$$\sqrt[4]{u^7 v^6 w^{11}} = \left(u^7 v^6 w^{11}\right)^{1/4}$$

- Ahora aplicamos las leyes de los exponentes:

$$u^{7/4} v^{6/4} w^{11/4}$$

- Lo único que podemos hacer es expresar las fracciones impropias (las que tienen un cociente mayor a 1), que aparecen en los exponentes como suma de un entero más una fracción propia (con cociente menor a 1).

- Por ejemplo, la fracción:

$$\frac{7}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4}$$

- Lo que nos permite escribir:

$$u^{7/4} = u^{1+(3/4)} = u^1 \cdot u^{3/4}$$

- Ahora aplicamos este principio a todos los factores del resultado:

$$\begin{aligned} u^{7/4} v^{6/4} w^{11/4} &= u^1 \cdot u^{3/4} \cdot v^1 \cdot v^{2/4} \cdot w^2 \cdot w^{3/4} \\ &= u \cdot u^{3/4} \cdot v \cdot v^{2/4} \cdot w^2 \cdot w^{3/4} \\ &= u\, v\, w^2 \cdot u^{3/4} \cdot v^{2/4} \cdot w^{3/4} \end{aligned}$$

- Pero ya sabemos que un exponente fraccionario en realidad representa un radical, con lo que podemos reescribir la expresión de una manera equivalente como sigue:

$$u\, v\, w^2 \cdot u^{3/4} \cdot v^{2/4} \cdot w^{3/4} = u\, v\, w^2 \cdot \sqrt[4]{u^3 \cdot v^2 \cdot w^3}$$

- Entonces,

$$\sqrt[4]{u^7 v^6 w^{11}} = u\, v\, w^2 \cdot \sqrt[4]{u^3 \cdot v^2 \cdot w^3}$$

- O de manera semejante, sin escribir radicales en el resultado:

$$\sqrt[4]{u^7 v^6 w^{11}} = u\, v\, w^2 \cdot u^{3/4} \cdot v^{2/4} \cdot w^{3/4}$$

Ejercicios 2.2.1 Simplifica cada una de las siguientes expresiones algebraicas aplicando las leyes de los exponentes. Expresa todos los exponentes positivos.

1) $x^5 \cdot x^7 \cdot x^{-12} =$ 1

2) $\dfrac{m^5\, n^9\, q^7}{m^{12}\, n^4\, q^{11}} =$ $\dfrac{n^5}{m^7\, q^4}$

3) $\dfrac{t^5\, u\, v^2}{u^5\, v^7\, t^9} =$ $\dfrac{1}{t^4\, u^4\, v^5}$

4) $\left(\dfrac{a^4\, b^5\, c^6}{a^6\, b^4\, c^2}\right)^2 =$ $\dfrac{b^2\, c^8}{a^4}$

5) $\left(\dfrac{x^9\, y^2\, z^3}{x^{11}\, y^9\, z^6}\right)^7 =$ $\dfrac{1}{x^{14}\, y^{49}\, z^{21}}$

6) $\left(\dfrac{x^5y^{-10}z^{12}}{x^{-10}y^2z^{12}}\right)=$ $x^{15}y^{-12}$

7) $\left(\dfrac{x^{-8}y^{10}z^4}{x^{11}y^{-4}z^{10}}\right)=$ $x^{-19}y^{14}z^{-6}$

8) $\left(\dfrac{x^{-11}y^{-10}z^8}{x^{-7}y^{12}z^4}\right)=$ $x^{-4}y^{-22}z^4$

9) $\left(\dfrac{x^5y^{-12}z^{13}}{x^{15}y^3z^5}\right)=$ $x^{-10}y^{-15}z^8$

10) $\left(\dfrac{x^8y^{11}z^{13}}{x^8y^{-11}z^{11}}\right)=$ $y^{22}z^2$

11) $\left(\dfrac{x^4y^{-10}z^6}{x^{-12}y^{-4}z^{13}}\right)=$ $x^{16}y^{-6}z^{-7}$

12) $\left(\dfrac{x^6y^{-5}z^{13}}{x^7y^4z^9}\right)=$ $x^{-1}y^{-9}z^4$

13) $\left(\dfrac{x^{13}y^{-4}z^{13}}{x^{-10}y^{-13}z^8}\right)=$ $x^{23}y^9z^5$

14) $\left(\dfrac{x^5y^{-9}z^4}{x^{-9}y^5z^6}\right)=$ $x^{14}y^{-14}z^{-2}$

15) $\left(\dfrac{x^{10}y^2z^5}{x^{15}y^{-2}z^6}\right)=$ $x^{-5}y^4z^{-1}$

16) $\left(\dfrac{x^{15}y^{-12}z^{11}}{x^{-4}y^{10}z^8}\right)=$ $x^{19}y^{-22}z^3$

17) $\left(\dfrac{x^4y^3z^{15}}{x^{-2}y^{12}z^9}\right)=$ $x^6y^{-9}z^6$

18) $\left(\dfrac{x^5y^{12}z^3}{x^{-13}y^{13}z^9}\right)=$ $x^{18}y^{-1}z^{-6}$

19) $\left(\dfrac{x^{-14}y^{-3}z^6}{x^{-13}y^8z^{13}}\right)=$ $x^{-1}y^{-11}z^{-7}$

20) $\left(\dfrac{x^3y^{-2}z^9}{x^{-2}y^{-14}z^3}\right)=$ $x^5y^{12}z^6$

21) $\left(\dfrac{x^{-8}y^{13}z^{14}}{x^{-12}y^{-7}z^{12}}\right)=$ $x^4y^{20}z^2$

22) $\left(\dfrac{x^{-2}y^{-9}z^{15}}{x^5y^8z^9}\right)=$ $x^{-7}y^{-17}z^6$

23) $\left(\dfrac{x^6y^5z^5}{x^6y^{-8}z^{11}}\right)=$ $y^{13}z^{-6}$

24) $\left(\dfrac{x^{15}y^{-2}z^5}{x^{-15}y^6z^6}\right)=$ $x^{30}y^{-8}z^{-1}$

25) $\left(\dfrac{x^{-7}y^7z^5}{x^7y^{-5}z^{15}}\right)=$ $x^{-14}y^{12}z^{-10}$

26) $\left(\dfrac{x^{11}y^{11}z^{4}}{x^{5}y^{-8}z^{6}}\right) =$ $x^{6}\,y^{19}\,z^{-2}$

27) $\left(\dfrac{x^{-5}y^{-4}z^{8}}{x^{-8}y^{-9}z^{15}}\right) =$ $x^{3}\,y^{5}\,z^{-7}$

28) $\left(\dfrac{x^{2}y^{14}z^{13}}{x^{-7}y^{-8}z^{9}}\right) =$ $x^{9}\,y^{22}\,z^{4}$

29) $\left(\dfrac{x^{-10}y^{-3}z^{9}}{x^{-14}y^{-4}z^{12}}\right) =$ $x^{4}\,y^{1}\,z^{-3}$

30) $\left(\dfrac{x^{-14}y^{-8}z^{13}}{x^{-3}y^{-7}z^{13}}\right) =$ $x^{-11}\,y^{-1}$

31) $\left(\dfrac{x^{-4}y^{-12}z^{6}}{x^{-3}y^{15}z^{9}}\right)^{5} =$ $x^{-5}\,y^{-135}\,z^{-15}$

32) $\left(\dfrac{x^{-10}y^{-2}z^{9}}{x^{-7}y^{11}z^{7}}\right)^{2} =$ $x^{-6}\,y^{-26}\,z^{4}$

33) $\left(\dfrac{x^{2}y^{10}z^{5}}{x^{-14}y^{-7}z^{10}}\right)^{2} =$ $x^{32}\,y^{34}\,z^{-10}$

34) $\left(\dfrac{x^{3}y^{10}z^{6}}{x^{-12}y^{-3}z^{7}}\right)^{2} =$ $x^{30}\,y^{26}\,z^{-2}$

35) $\left(\dfrac{x^{12}y^{-2}z^{2}}{x^{-13}y^{-13}z^{8}}\right)^{2} =$ $x^{50}\,y^{22}\,z^{-12}$

36) $\left(\dfrac{x^{-4}y^{-5}z^{8}}{x^{-6}y^{4}z^{5}}\right)^{2} =$ $x^{4}\,y^{-18}\,z^{6}$

37) $\left(\dfrac{x^{-11}y^{7}z^{12}}{x^{-3}y^{-9}z^{10}}\right)^{3} =$ $x^{-24}\,y^{48}\,z^{6}$

38) $\left(\dfrac{x^{13}y^{4}z^{14}}{x^{12}y^{14}z^{9}}\right)^{6} =$ $x^{6}\,y^{-60}\,z^{30}$

39) $\left(\dfrac{x^{4}y^{9}z^{8}}{x^{-8}y^{7}z^{3}}\right)^{2} =$ $x^{24}\,y^{4}\,z^{10}$

40) $\left(\dfrac{x^{-3}y^{10}z^{9}}{x^{-3}y^{-12}z^{4}}\right)^{2} =$ $y^{44}\,z^{10}$

41) $\left(\dfrac{x^{9}y^{2}z^{4}}{x^{-2}y^{11}z^{14}}\right)^{2} =$ $x^{22}\,y^{-18}\,z^{-20}$

42) $\left(\dfrac{x^{6}y^{-15}z^{15}}{x^{-2}y^{-14}z^{4}}\right)^{3} =$ $x^{24}\,y^{-3}\,z^{33}$

43) $\left(\dfrac{x^{14}y^{2}z^{7}}{x^{-4}y^{-10}z^{4}}\right)^{4} =$ $x^{72}\,y^{48}\,z^{12}$

44) $\left(\dfrac{x^{-5}y^{-8}z^{9}}{x^{12}y^{13}z^{8}}\right)^{2} =$ $x^{-34}\,y^{-42}\,z^{2}$

45) $\left(\dfrac{x^{10}y^{3}z^{9}}{x^{-6}y^{14}z^{6}}\right)^{2} =$ $x^{32}\,y^{-22}\,z^{6}$

46) $\left(\dfrac{x^{-8}y^{-7}z^{4}}{x^{-9}y^{-14}z^{14}}\right)^{4} =$ $x^{4}\,y^{28}\,z^{-40}$

47) $\left(\dfrac{x^{-10}y^{-8}z^{8}}{x^{-7}y^{-6}z^{8}}\right)^{2} =$ $x^{-6}\,y^{-4}$

48) $\left(\dfrac{x^{11}y^{-11}z^{13}}{x^{6}y^{-4}z^{12}}\right)^{5} =$ $x^{25}\,y^{-35}\,z^{5}$

49) $\left(\dfrac{x^{-9}y^{5}z^{13}}{x^{3}y^{2}z^{11}}\right)^{3} =$ $x^{-36}\,y^{9}\,z^{6}$

50) $\left(\dfrac{x^{-5}y^{-13}z^{8}}{x^{-12}y^{2}z^{15}}\right)^{2} =$ $x^{14}\,y^{-30}\,z^{-14}$

51) $\left(\dfrac{x^{-13}y^{5}z^{7}}{x^{2}y^{6}z^{8}}\right)^{2} =$ $x^{-30}\,y^{-2}\,z^{-2}$

52) $\left(\dfrac{x^{11}y^{-4}z^{4}}{x^{4}y^{-8}z^{11}}\right)^{3} =$ $x^{21}\,y^{12}\,z^{-21}$

53) $\left(\dfrac{x^{-12}y^{-13}z^{4}}{x^{3}y^{6}z^{11}}\right)^{2} =$ $x^{-30}\,y^{-38}\,z^{-14}$

54) $\left(\dfrac{x^{2}y^{9}z^{11}}{x^{8}y^{-8}z^{8}}\right)^{4} =$ $x^{-24}\,y^{68}\,z^{12}$

55) $\left(\dfrac{x^{13}y^{-7}z^{3}}{x^{-2}y^{-5}z^{4}}\right)^{3} =$ $x^{45}\,y^{-6}\,z^{-3}$

56) $\left(\dfrac{x^{9}y^{-7}z^{11}}{x^{-1}y^{-11}z^{13}}\right)\left(\dfrac{x^{4}y^{6}z^{12}}{x^{3}y^{3}z^{4}}\right) =$ $x^{11}\,y^{7}\,z^{6}$

57) $\left(\dfrac{xy^{-1}z^{12}}{x^{4}y^{9}z^{7}}\right)\left(\dfrac{x^{10}y^{9}}{y^{8}z^{7}}\right) =$ $x^{7}\,y^{-9}\,z^{-2}$

58) $\left(\dfrac{x^{-12}z^{8}}{x^{-4}yz^{9}}\right)\left(\dfrac{y^{12}z^{12}}{x^{2}y^{12}z^{12}}\right) =$ $x^{-10}\,y^{-1}\,z^{-1}$

59) $\left(\dfrac{x^{-3}y^{6}}{x^{-3}y^{13}}\right)\left(\dfrac{x^{4}y^{9}z^{3}}{x^{4}yz^{5}}\right) =$ $y\,z^{-2}$

60) $\left(\dfrac{x^{-1}y^{-2}z^{6}}{y^{2}z^{12}}\right)\left(\dfrac{x^{12}y^{7}}{x^{2}y^{3}z^{4}}\right) =$ $x^{9}\,z^{-10}$

61) $\left(\dfrac{x^{-5}y^{-5}z^{13}}{x^{-3}y^{3}z^{13}}\right)\left(\dfrac{x^{14}y^{12}z^{12}}{xy^{14}z^{11}}\right) =$ $x^{11}\,y^{-10}\,z$

62) $\left(\dfrac{x^{-6}y^{-3}z^{5}}{x^{-2}yz^{9}}\right)\left(\dfrac{x^{14}y^{11}z^{13}}{xy^{6}z^{13}}\right) =$ $x^{9}\,y\,z^{-4}$

63) $\left(\dfrac{x^{-8}y^{5}z^{13}}{x^{2}y^{8}z^{7}}\right)\left(\dfrac{x^{5}y^{6}z}{x^{2}y^{5}z}\right) =$ $x^{-7}\,y^{-2}\,z^{6}$

64) $\left(\dfrac{x^{-1}y^6z^{11}}{xyz^{14}}\right)\left(\dfrac{x^{14}y^6z^{13}}{x^2y^9z^{12}}\right)=$ $x^{10}y^2z^{-2}$

65) $\left(\dfrac{x^{10}y^{-3}z^9}{x^{-1}y^4z^8}\right)\left(\dfrac{x^{10}y^7z^{14}}{x^3y^8z^9}\right)=$ $x^{18}y^{-8}z^6$

66) $\left(\dfrac{xy^4z^{12}}{xy^6z^7}\right)\left(\dfrac{x^8y^{13}z^{13}}{x^4y^3z^9}\right)=$ $x^4y^8z^9$

67) $\left(\dfrac{x^{-5}z^{11}}{x^{-4}y^{-6}z^{13}}\right)\left(\dfrac{x^8y^{13}}{x^2y^6z^9}\right)=$ $x^5y^{13}z^{-11}$

68) $\left(\dfrac{y^{-14}z^6}{x^{-2}y^{-9}z^{14}}\right)\left(\dfrac{x^2y^2z^4}{x^2y^{12}z^9}\right)=$ $x^2y^{-15}z^{-13}$

69) $\left(\dfrac{x^{-13}y^8}{x^4y^{13}z^7}\right)\left(\dfrac{x^3y^2z^2}{x^3y^7z^6}\right)=$ $x^{-17}y^{-10}z^{-11}$

70) $\left(\dfrac{x^{-14}y^{-9}z^9}{xy^{11}z^{13}}\right)\left(\dfrac{x^{10}y^6z^4}{x^4y^4z}\right)=$ $x^{-9}y^{-18}z^{-1}$

71) $\left(\dfrac{x^{13}y^{-2}z^6}{x^{-3}y^{-5}z^6}\right)\left(\dfrac{x^{11}yz^{13}}{y^6z^{11}}\right)=$ $x^{27}y^{-2}z^2$

72) $\left(\dfrac{x^{-4}y^{13}z^{10}}{y^{13}z^2}\right)\left(\dfrac{x^7y^6z^7}{y^9z^2}\right)=$ $x^3y^{-3}z^{13}$

73) $\left(\dfrac{x^{-6}y^{-3}}{x^2y^{-4}z^4}\right)\left(\dfrac{x^9y^{12}}{y^{12}z^{13}}\right)=$ xyz^{-17}

74) $\left(\dfrac{x^7z^5}{xy^8z^{10}}\right)\left(\dfrac{x^8yz^7}{xz^6}\right)=$ $x^{13}y^{-7}z^{-4}$

75) $\left(\dfrac{x^{12}y^3z^9}{x^{-2}y^{-9}z^2}\right)\left(\dfrac{x^7y^{11}z^{12}}{x^3y^{10}z^4}\right)=$ $x^{18}y^{13}z^{15}$

76) $\sqrt{x^{23}y^6z^7}=$ $x^{11}y^3z^3\sqrt{xz}$

77) $\sqrt[5]{x^8y^{12}z^{11}}=$ $xy^2z^2\sqrt[5]{x^3y^2z}$

78) $\sqrt{x^{13}y^{15}z^{11}}=$ $x^6y^7z^5\sqrt{xyz}$

79) $\sqrt[3]{x^{11}y^{13}z^{14}}=$ $x^3y^4z^4\sqrt[3]{x^2yz^2}$

80) $\sqrt[3]{x^{15}y^{17}z^{21}}=$ $x^5y^5z^7\sqrt[3]{y^2}$

81) $\sqrt[5]{x^{21}y^7z^{23}}=$ $x^4yz^4\sqrt[5]{xy^2z^3}$

82) $\sqrt[8]{x^{10}y^{12}z^{19}}=$ $xyz^2\sqrt[8]{x^2y^4z^3}$

83) $\sqrt[4]{x^{23}y^6}=$ $x^5y\sqrt[4]{x^3y^2}$

84) $\sqrt[8]{y^4z^{11}}=$ $z\sqrt[8]{y^4z^3}$

85) $\sqrt[8]{x^2y^5z^{11}}=$ $z\sqrt[8]{x^2y^5z^3}$

86) $\sqrt[7]{x^7y^{13}z^{23}}=$ $xyz^3\sqrt[7]{y^6z^2}$

87) $\sqrt[3]{x^{10}y^{16}z^{19}} =$ $x^3y^5z^6\sqrt[3]{x\,y\,z}$

88) $\sqrt[5]{y^{19}z^5} =$ $y^3z\sqrt[5]{y^4}$

89) $\sqrt[7]{x^{19}y^{15}z^{11}} =$ $x^2y^2z\sqrt[7]{x^5y\,z^4}$

90) $\sqrt[5]{x^{12}y^{17}z^{11}} =$ $x^2y^3z^2\sqrt[5]{x^2y^2z}$

91) $\sqrt{\dfrac{x^6y^5z^8}{x^2y^2z^6}} =$ $x^2y\,z\,\sqrt{y}$

92) $\sqrt[6]{\dfrac{x^{10}y^4z^3}{x\,y^8}} =$ $\sqrt[6]{\dfrac{x^3z^3}{y^4}}$

93) $\sqrt{\dfrac{x^{13}y^5z^3}{x^2y^{12}z^3}} =$ $\dfrac{x^5}{y^3}\sqrt{\dfrac{x}{y}}$

94) $\sqrt{\dfrac{x^8y^4}{x^2y\,z^{11}}} =$ $\dfrac{x^3y}{z^5}\sqrt{\dfrac{y}{z}}$

95) $\sqrt{\dfrac{x^{12}y^{10}z^{13}}{x^4y^{10}z^2}} =$ $x^4z^5\sqrt{z}$

96) $\sqrt{\dfrac{x^{13}y^6z}{y^4z^{14}}} =$ $\dfrac{x^6y}{z^6}\sqrt{\dfrac{x}{z}}$

97) $\sqrt[5]{\dfrac{x^7y^{13}z^{13}}{x^3y^{11}z^{10}}} =$ $\sqrt[5]{x^4y^2z^3}$

98) $\sqrt[6]{\dfrac{x\,y^2z^5}{x^3y^{11}z^5}} =$ $\dfrac{1}{y}\sqrt[6]{\dfrac{1}{x^2y^3}}$

99) $\sqrt{\dfrac{x\,z^3}{x^2y^7z^{10}}} =$ $\dfrac{1}{y^3z^3}\sqrt{\dfrac{1}{x\,y\,z}}$

100) $\sqrt[4]{\dfrac{y^7}{x^3y^{10}z^{14}}} =$ $\dfrac{1}{z^3}\sqrt[4]{\dfrac{1}{x^3y^3z^2}}$

101) $\sqrt[5]{\dfrac{y^8z^4}{x^2y^7}} =$ $\sqrt[5]{\dfrac{y\,z^4}{x^2}}$

102) $\sqrt[5]{\dfrac{x^8y^{11}z^8}{x^3y^{12}z^6}} =$ $\sqrt[5]{\dfrac{z^2}{y}}$

103) $\sqrt[5]{\dfrac{x^8y^{10}z^3}{x\,y^9z}} =$ $x\sqrt[5]{x^2y\,z^2}$

104) $\sqrt[4]{\dfrac{x^{14}y^6z^4}{x^4y^{11}}} =$ $\dfrac{x^2z}{y}\sqrt[4]{\dfrac{x^2}{y}}$

105) $\sqrt[3]{\dfrac{y^9}{x^4y^{12}z^{14}}} =$ $\dfrac{1}{x\,y\,z^4}\sqrt[3]{\dfrac{1}{x\,z^2}}$

106) $\sqrt[3]{\dfrac{x^8 y^5 z^{11}}{x^4 y z}} =$ $x y z^3 \sqrt[3]{x y z}$

107) $\sqrt{\dfrac{x^5 y^8 z^2}{x^3 y^5 z^{13}}} =$ $\dfrac{x y}{z^5}\sqrt{\dfrac{y}{z}}$

108) $\sqrt[5]{\dfrac{x^7 y^{12} z^{14}}{x^2 y^{12} z^{12}}} =$ $x \sqrt[5]{z^2}$

109) $\sqrt[3]{\dfrac{z^{14}}{x y^9 z}} =$ $\dfrac{z^4}{y^3}\sqrt[3]{\dfrac{z}{x}}$

110) $\sqrt[4]{\dfrac{x^7 y z}{x y^{11} z^{14}}} =$ $\dfrac{x}{y^2 z^3}\sqrt[4]{\dfrac{x^2}{y^2 z}}$

2.2.2 Operaciones con polinomios

Los polinomios son una generalización de nuestro sistema de numeración.
Cuando escribimos un número, por ejemplo, 2354, queremos decir:

$$\begin{aligned} 2354 &= 2000 + 300 + 50 + 4 \\ &= (2)(1000) + (3)(100) + (5)(10) + 4 \\ &= (2)(10^3) + (3)(10^2) + (5)(10^1) + (4)(10^0) \end{aligned}$$

Ahora, en lugar de utilizar nuestra base decimal, es decir, 10, utilizamos un número x cualquiera:

$$(2)(10^3) + (3)(10^2) + (5)(10^1) + (4)(10^0) \longrightarrow 2x^3 + 3x^2 + 5x + 4$$

que en este caso tendremos un número en la base x, no en base decimal.

Definición 1

Polinomio

Es una expresión algebraica de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_x + a_0$$

Donde los coeficientes $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_3, a_2, a_1, a_0$ *son números reales y los exponentes* $n, n-1, \cdots, 3, 2, 1$ *son números enteros.*
El grado del polinomio es el número n*.*

Ejemplo 1

Los siguientes son polinomios:

- $x + 1$
- $x^2 + x + 1$
- $\sqrt{2}x^4 - 5x^3 - 12x^2 + x - \pi$
- $\dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^4}{4}$
- $\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{4}$

Observa que los coeficientes pueden ser fracciones o inclusive números irracionales, pero los exponentes necesariamente deben ser números enteros.

Existe un lenguaje específico de los polinomios que consiste en el nombre que se asigna a cada uno, dependiendo del número de términos que contenga.

CLASIFICACIÓN DE POLINOMIOS

Definición 2

Monomio: *Es un polinomio que tiene solamente un término.*
Ejemplo: $3x^2$

Binomio: *Es un polinomio que tiene exactamente dos términos no semejantes.*
Ejemplo: $a^2 - b^2$

Trinomio: *Es un polinomio que tiene exactamente tres términos no semejantes.*
Ejemplo: $x^2 + 2x + 1$

Como los polinomios son una generalización de los números, las operaciones con polinomios se realizan utilizando los mismos procedimientos que con los números.

Ejemplo 2

Calcula la siguiente suma:

$$(x^2 + 5x - 3) + (2x^2 - 7x + 12) =$$

- Podemos considerar al coeficiente del término que contiene a x^2 como el dígito de las *centenas* en los polinomios.
- De manera semejante, podemos considerar al término que contiene a x como el dígito de las *decenas* en los polinomios.
- Finalmente, podemos considerar al término que no contiene a x como el dígito de las unidades.
- Cuando realizamos operaciones con números sumamos unidades con unidades, decenas con decenas, centenas con centenas, etc.
- De la misma manera realizaremos la suma con los polinomios:

$$(x^2 + 5x - 3) + (2x^2 - 7x + 12) = 3x^2 - 2x + 9$$

- Si observas, sumamos por separado:

$$\begin{array}{rrcl} \text{«\textit{Centenas}»:} & x^2 + 2x^2 & = & 3x^2 \\ \text{«\textit{Decenas}»:} & 5x - 7x & = & -2x \\ \text{«\textit{Unidades}»:} & -3 + 12 & = & 9 \end{array}$$

- Y finalmente escribimos el resultado.
- Decimos que sumamos los términos que son semejantes.

Debes observar que no podemos sumar un término que tiene a x^2 con otro que tiene a x, porque es como si estuvieramos sumando centenas con decenas... el error consistiría en que no acomodamos los números correctamente alineados con respecto al punto decimal.

El maestro te corrigiría diciendo: *estás sumando dos términos que no son semejantes, y siempre debemos sumar téminos semejantes...*

Definición 3

TÉRMINOS SEMEJANTES
Dos o más términos son semejantes si son monomios que tienen las mismas literales y cada una del mismo grado, es decir, tienen el mismo exponente en su literal respectivo.

Realizar una resta de polinomios es lo mismo que realizar una suma, porque restar significa sumar un número negativo.

Pero para poder realizar correctamente una resta de polinomios, primero debemos aplicar las leyes de los signos, multiplicando por el signo negativo que está antes del segundo polinomio.

Así que, solamente como recordatorio, se da la siguiente definición.

Definición 4

LEYES DE LOS SIGNOS
Las leyes de los signos son las siguientes:

- $+ \cdot + = +$ *(más por más es más)*
- $+ \cdot - = -$ *(más por menos es menos)*
- $- \cdot + = -$ *(menos por más es menos)*
- $- \cdot - = +$ *(menos por menos es más)*

Ejemplo 3

Calcula la siguiente resta de polinomios:

$$(7x^2 + 3x - 1) - (2x^2 - 1x + 2) =$$

- Aquí debemos aplicar las leyes de los signos primero: vamos a multiplicar por el signo negativo que está a la izquierda del segundo polinomio todos los términos de él:

$$-(2x^2 - 1x + 2) = -2x^2 + 1x - 2$$

- Ahora procedemos como en el caso de la suma de polinomios, sumando términos semejantes...

$$7x^2 + 3x - 1 - 2x^2 + 1x - 2 = 5x^2 + 4x - 3$$

- Entonces,

$$(7x^2 + 3x - 1) - (2x^2 - 1x + 2) = 5x^2 + 4x - 3$$

La multiplicación de los polinomios requiere de la aplicación de las reglas de los exponentes.

Empezamos con la multiplicación de un monomio por un polinomio.

Ejemplo 4

Calcula:

$$\left(3x^2\right)\left(2 + 5x + x^2\right) =$$

- Empezamos recordando que, de acuerdo a la ley distributiva, el monomio $3x^2$ tiene que multiplicarse por todos los términos del polinomio $2 + 5x + x^2$.
- Entonces podemos ver que se trata solamente de varias multiplicaciones de un monomio por otro monomio... y esto es algo que ya sabemos hacer.

- No olvides aplicar la primera ley de los exponentes...
- Empezamos: $(3x^2)(2) = 6x^2$
- $\left(3x^2\right)(5x) = 15x^3$
- $\left(3x^2\right)\left(x^2\right) = 3x^4$
- Ahora, el resultado es, de acuerdo a la ley distributiva, igual a la suma de todos los productos de monomios que ya encontramos,
- Entonces:
$$\left(3x^2\right)\left(2+5x+x^2\right) = 6x^2 + 15x^3 + 3x^4$$

Ahora la multiplicación de un binomio por un polinomio.

El procedimiento para calcular el siguiente producto es, en esencia, el mismo que el del ejemplo anterior, salvo por una pequeña diferencia: aquí debemos aplicar dos veces la ley distributiva, una por cada término del binomio.

Así que no debes espantarte por ver muchos términos en cada uno de los polinomios que se está multiplicando: siempre aplicamos el mismo procedimiento: aplicamos la ley distributiva para cada uno de los términos del primer polinomio, multiplicando por todos los términos del segundo polinomio.

Al final, simplificamos sumando términos semejantes y así obtenemos el resultado de esa multiplicación.

Multiplica:
$$(2-x)\left(7-2x+3x^2\right) =$$

Ejemplo 5

- Empezamos multiplicando el primer término del primer polinomio $(2-x)$ por el segundo polinomio:
- $(2)\left(7-2x+3x^2\right) = 14-4x+6x^2$
- Ahora multiplicamos el segundo término del primer polinomio por el segundo polinomio:
- $(-x)\left(7-2x+3x^2\right) = -7x+14x^2-3x^3$
- Ahora sumamos los términos semejantes para formar un polinomio, que será el resultado de nuestra multiplicación:
$$\left(14-4x+6x^2\right)+\left(-7x+14x^2-3x^3\right) = 14-11x+20x^2-3x^3$$
- Entonces,
$$(2-x)\left(7-2x+3x^2\right) = 14-1x+20x^2-3x^3$$
- Con lo que hemos terminado.

Antes de continuar con la división de un polinomio entre un binomio, recordaremos el procedimiento para realizar la división entre números.

Consideremos, por ejemplo, la siguiente división:

$$12\overline{\big)\,331}$$

Para realizar esta operación empezamos buscando un número que multiplicado por 12 sea igual a 33, o un poco menor. Ese número es 2, porque $2 \times 12 = 24$.

Escribimos 2 "*arriba de la casita*" y 24 debajo del número 33:

$$\begin{array}{r|l}
 & \;2 \\ \cline{2-2}
12 & 331 \\
 & 24
\end{array}$$

Lo siguiente consiste en cambiar de signo al número 24 y hacer la suma de los números 33 y -24:

$$\begin{array}{r|l}
 & \;2 \\ \cline{2-2}
12 & 331 \\
 & -24 \\ \cline{2-2}
 & \;\;\;9
\end{array}$$

Ahora "*bajamos*" el número 1 (del 331) y volvemos a buscar un número que multiplicado por 12 sea igual a 91 o un poco menos. Ese número es 7, porque $12 \times 7 = 84$.

De nuevo, tenemos que cambiar el signo del 84 cuando lo escribamos debajo del 91:

$$\begin{array}{r|l}
 & 27 \\ \cline{2-2}
12 & 331 \\
 & -24 \\ \cline{2-2}
 & \;\;\;91 \\
 & \;-84 \\ \cline{2-2}
 & \;\;\;\;\;7
\end{array}$$

Entonces, el resultado de dividir 331 entre 12 es igual a 27 enteros y $7/12$.

Observa que el residuo de la división (7) se dividió entre 12 (el divisor), porque todavía no lo habíamos dividido (todavía estaba adentro de "*la casita*").

Exactamente el mismo procedimiento es el que seguiremos cuando hagamos una división entre polinomios.

Ejemplo 6

Calcula:

$$(x^2 - 3x - 10) \div (x + 2) =$$

- Empezamos identificando el dividendo y el divisor:

  Dividendo: $x^2 - 3x - 10$

  Divisor: $x + 2$

- Ahora los colocamos en "*la casita*" para hacer la división:

$$\begin{array}{r|l}
 & \\ \cline{2-2}
x+2 & x^2 - 3x - 10
\end{array}$$

- Ahora buscamos una expresión que multiplicada por x nos de igual a x^2. Esa expresión es: x.

$$\begin{array}{r|l}
 & x \\ \cline{2-2}
x+2 & x^2 - 3x - 10
\end{array}$$

- Ahora, vamos a multiplicar la expresión que acabamos de encontrar por $x+2$. Igual que en el caso de la división con números, al resultado le vamos a cambiar el signo y después hacemos la suma algebraica.

$$\begin{array}{r|l}
 & \quad x \\ \cline{2-2}
x+2 & \cancel{x^2} - 3x - 10 \\
 & -\cancel{x^2} - 2x \\ \cline{2-2}
 & \qquad -5x
\end{array}$$

- Ahora bajamos el número -10 del divisor.
- Al igual que en el caso de la división con números, buscamos una expresión que multiplicada por x nos dé igual a: $-5x$
- En este caso, la expresión que buscamos es un número: -5
- Ahora multiplicamos este número por $x+2$ y el resultado lo escribimos debajo del último renglón.
- Recuerda que debemos cambiar el signo al resultado de la multiplicación.
- Después debemos realizar la suma...

$$\begin{array}{r|l}
 & x-5 \\ \cline{2-2}
x+2 & x^2 - 3x - 10 \\
 & -\cancel{x^2} - 2x \\ \cline{2-2}
 & \qquad -\cancel{5x} - \cancel{10} \\
 & \qquad \cancel{5x} + \cancel{10} \\ \cline{2-2}
 & \qquad 0x + 0
\end{array}$$

- Entonces,

$$(x^2-3x-10)\div(x+2) = \frac{x^2-3x-10}{x+2} = x-5$$

- Una manera de comprobar que el resultado de la división es correcto consiste en multiplicar el divisor por el cociente y sumar el residuo. Debemos obtener como resultado el dividendo.
- Para que quede más claro, considera: $331 \div 12 = 27 + (7/12)$. Para comprobar que el resultado es correcto hacemos: $27 \times 12 + 7 = 331$
- Ahora aplicamos este mismo principio a la división entre polinomios:

$$(x+2)\cdot(x-5) = x^2 - 3x - 10$$

Si se te llega a olvidar cómo realizar una operación con polinomios, basta recordar cómo realizas esa operación con números.

Exactamente el mismo procedimiento es el que vas a utilizar con los polinomios. Esto gracias a que los polinomios en realidad representan números, y como tales deben ser tratados.

Podemos simplificar el procedimiento que utilizamos cuando realizamos la división de un polinomio entre un binomio. Para esto vamos a observar los siguientes arreglos:

$$\begin{array}{r|l}
 & x-5 \\ \cline{2-2}
x+2 & x^2 - 3x - 10 \\
 & -\cancel{x^2} - 2x \\ \cline{2-2}
 & \qquad -\cancel{5x} - \cancel{10} \\
 & \qquad \cancel{5x} + \cancel{10} \\ \cline{2-2}
 & \qquad 0x + 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrr|r}
1 & -3 & -10 & -2 \\
 & -2 & 10 & \\ \hline
1 & -5 & \boxed{0} &
\end{array}$$

Observa que los coeficientes del dividendo están en el primer renglón. El número -2 que está a la derecha de la línea vertical representa el término independiente de $x+2$, pero le cambiamos el signo.

Para empezar con esta división (sintética) entre los polinomios, bajamos el primer coeficiente del primer renglón hasta el tercer renglón:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -10 & -2 \\ & & & \\ \hline 1 & & & \end{array}$$

Ahora multiplicamos -2 por 1, y obtenemos -2. Este número lo escribimos en el segundo renglón, pero en la segunda columna:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -10 & -2 \\ & -2 & & \\ \hline 1 & & & \end{array}$$

Sumamos los números que están en la segunda columna y el resultado lo escribimos en el tercer renglón (misma columna):

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -10 & -2 \\ & -2 & & \\ \hline 1 & -5 & & \end{array}$$

De nuevo, multiplicamos por -2 el último número del tercer renglón, en este caso -5, y el resultado lo escribimos en la siguiente columna del segundo renglón:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -10 & -2 \\ & -2 & 10 & \\ \hline 1 & -5 & & \end{array}$$

De nuevo, sumamos en columna. Ahora en la tercera columna y el resultado lo escribimos en el tercer renglón:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -10 & -2 \\ & -2 & 10 & \\ \hline 1 & -5 & \boxed{0} & \end{array}$$

Y hemos terminado.

El último renglón de la tabla nos indica el resultado de la división: $x-5$. Solamente debes restar 1 al exponente del dividendo para escribirlo en el divisor. Esta regla se aplica cuando el dividendo es de la forma $x-k$, siendo k algún número real.

Ahora tú compara este procedimiento con el procedimiento «*normal*» de la división de polinomios.

A este procedimiento se le conoce como la división sintética. Al procedimiento «*normal*» se le conoce como la división «*larga*».

Es importante mencionar que este procedimiento funciona solamente cuando el divisor de la división es un binomio con un coeficiente del término con literal igual a uno.

Por ejemplo, funciona con divisores como los siguientes: $x+7$, $x-3$, $x-21$, etc., pero **no** funciona con los siguientes: $3x+1$, $7x-11$, $2x-4$, porque el coeficiente del término con literal no es uno.

En estos casos, tienes que igualar el dividendo a cero y despejar x. El resultado es el número que debe ir a la derecha de la «*casita*» para la división sintética.

Por ejemplo, si necesitas dividir: $x^2-3x-10$ entre $3x+1$, resolvemos $3x+1=0$ y obtenemos $x=-1/3$. Entonces, debemos ecribir:

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -10 & -1/3 \\ & & & \\ \hline & & & \end{array}$$

y realiza la división como se mostró.

Debes tener especial cuidado con la división sintética, porque en caso de que desees dividir, por ejemplo: $x^5 - x^3 + x^2 + 2x + 4$ entre $x + 1$ utilizando este procedimiento, debes notar que en el dividendo no aparece un término con x^4. Esto significa que su coeficiente es cero. Entonces, la tabla inicial debe aparecer como sigue:

$$\begin{array}{cccccc|c} x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & k & \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 4 & -1 \\ & & & & & & \\ \hline & & & & & & \end{array}$$

Debes tener cuidado con estos casos.

Realiza cada una de las siguientes operaciones entre polinomios. Las divisiones realizalas una con la división larga y la siguiente con la división sintética de manera alternada.

Ejercicios 2.2.2

1) $(-13+16x+11x^2+16x^3)+(-19-21x^2+16x^3)$

R. $-32+16x-10x^2+32x^3$

2) $(-19+20x+11x^2-19x^3)+(-9-6x-x^2-14x^3)$

R. $-28+14x+10x^2-33x^3$

3) $(-x-14x^2+14x^3)+(22-19x-8x^2-20x^3)$

R. $22-20x-22x^2-6x^3$

4) $(2+18x-5x^2-17x^3)+(19+19x-21x^2+3x^3)$

R. $21+37x-26x^2-14x^3$

5) $(4-19x^2-3x^3)+(7+8x-2x^2-14x^3)$

R. $11+8x-21x^2-17x^3$

6) $(24-21x+9x^2-14x^3)+(-16-4x-15x^2+9x^3)$

R. $8-25x-6x^2-5x^3$

7) $(19-9x+x^2)+(15+13x^2+4x^3)$

R. $34-9x+14x^2+4x^3$

8) $(21-8x-23x^2-x^3)+(14-12x+18x^3)$

R. $35-20x-23x^2+17x^3$

9) $(-10-19x+8x^2-18x^3)+(21-12x+x^2-21x^3)$

R. $11-31x+9x^2-39x^3$

10) $(-10-19x-15x^2-6x^3)+(-24+x-14x^2+8x^3)$

R. $-34-18x-29x^2+2x^3$

11) $(-8+5x+21x^2+11x^3)+(-5-7x+3x^3)$

R. $-13-2x+21x^2+14x^3$

12) $(18+24x-24x^2-18x^3)+(-17-11x^3)$

R. $1+24x-24x^2-29x^3$

13) $(-19-24x-11x^2-6x^3)+(-3+x-7x^2+15x^3)$

R. $-22-23x-18x^2+9x^3$

14) $(22+16x+11x^2-21x^3)+(5-5x-10x^2-3x^3)$

R. $27+11x+x^2-24x^3$

15) $(6+x+9x^2+9x^3)+(13-10x+6x^2+16x^3)$

R. $19-9x+15x^2+25x^3$

16) $(-7x+20x^2-12x^3)+(8-4x-17x^2+24x^3)$

R. $8-11x+3x^2+12x^3$

17) $(4+23x-11x^3)+(-2+9x+x^2+x^3)$

R. $2+32x+x^2-10x^3$

18) $(-19+21x-6x^2-12x^3)+(15+23x-4x^2+21x^3)$

R. $-4+44x-10x^2+9x^3$

19) $(-15+18x-13x^2+12x^3)+(7+4x-6x^2+5x^3)$

R. $-8+22x-19x^2+17x^3$

20) $(17-15x+14x^2+19x^3)+(-23-24x+10x^2-23x^3)$

R. $-6-39x+24x^2-4x^3$

21) $(19-6x-11x^2+3x^3)-(-12-9x-6x^2+7x^3)$

R. $31+3x-5x^2-4x^3$

22) $(-18x-15x^2+9x^3)-(3+24x-10x^2+12x^3)$

R. $-3-42x-5x^2-3x^3$

23) $(-14-x+7x^2-7x^3)-(11+6x+14x^2+16x^3)$

R. $-25-7x-7x^2-23x^3$

24) $(1+x-19x^2-x^3)-(14+18x+22x^2-12x^3)$

R. $-13-17x-41x^2+11x^3$

25) $(11-12x+13x^2+13x^3)-(-9+19x-x^2+23x^3)$

R. $20-31x+14x^2-10x^3$

26) $(3-24x-12x^2-22x^3)-(-18-x-22x^2-16x^3)$

R. $21-23x+10x^2-6x^3$

27) $(-3+21x-17x^2-18x^3)-(-11+24x-5x^2-3x^3)$

R. $8-3x-12x^2-15x^3$

28) $(-6-8x-14x^2+11x^3)-(3-5x+20x^2-5x^3)$

R. $-9-3x-34x^2+16x^3$

29) $(-8-x-20x^2-2x^3)-(16x-22x^2)$

R. $-8-17x+2x^2-2x^3$

30) $(16+21x+7x^2+18x^3)-(-21+17x+24x^2-9x^3)$

R. $37+4x-17x^2+27x^3$

31) $(-24-7x+18x^2-6x^3)-(1-12x+20x^2-10x^3)$

R. $-25+5x-2x^2+4x^3$

32) $(-18-16x-11x^2-10x^3)-(10-11x+9x^2-21x^3)$

R. $-28-5x-20x^2+11x^3$

33) $(-15-4x+17x^2+7x^3)-(21+24x+15x^2+21x^3)$

R. $-36-28x+2x^2-14x^3$

34) $(3+13x-20x^2-x^3)-(16x-15x^2-17x^3)$

R. $3-3x-5x^2+16x^3$

35) $(-4+18x-11x^2-14x^3)-(20-22x-19x^2+16x^3)$

R. $-24+40x+8x^2-30x^3$

36) $(-20-17x+17x^2+x^3)-(-3+16x-x^2+17x^3)$

R. $-17-33x+18x^2-16x^3$

37) $(-11+13x-7x^2+7x^3)-(8+6x+12x^2+12x^3)$

R. $-19+7x-19x^2-5x^3$

38) $(12+3x+12x^2+20x^3)-(6-6x+9x^2+4x^3)$

R. $6+9x+3x^2+16x^3$

39) $(5+2x-10x^2+2x^3)-(-16+23x+4x^2+17x^3)$

R. $21-21x-14x^2-15x^3$

40) $(1-20x^2+8x^3)-(-17-13x-3x^2+10x^3)$

R. $18+13x-17x^2-2x^3$

41) $(4+3x)\cdot(-6+6x-4x^2+6x^3)$ **R.** $-24+6x+2x^2+12x^3+24x^4$

42) $(3+6x)\cdot(-2+3x-6x^2+9x^3)$ **R.** $-6-3x+0x^2-9x^3+27x^4$

43) $(9+6x)\cdot(1+4x-5x^2+5x^3)$ **R.** $9+42x-21x^2+15x^3+45x^4$

44) $(1+6x)\cdot(-8-8x+9x^2-8x^3)$ **R.** $-8-56x-39x^2+46x^3-8x^4$

45) $(-6-9x)\cdot(5+9x-6x^2+9x^3)$ **R.** $-30-99x-45x^2+0x^3-54x^4$

46) $(4+x)\cdot(-3+6x-3x^2+4x^3)$ **R.** $-12+21x-6x^2+13x^3+16x^4$

47) $(2+8x)\cdot(-1-7x-4x^2-x^3)$ **R.** $-2-22x-64x^2-34x^3-2x^4$

48) $(-5-3x)\cdot(-1-6x-3x^2+3x^3)$ **R.** $5+33x+33x^2-6x^3-15x^4$

49) $(7-8x)\cdot(7-3x+8x^2+2x^3)$ **R.** $49-77x+80x^2-50x^3+14x^4$

50) $(-2-3x)\cdot(-6-x+7x^2+x^3)$ **R.** $12+20x-11x^2-23x^3-2x^4$

51) $(-6-8x)\cdot(7-7x-8x^2-9x^3)$ **R.** $-42-14x+104x^2+118x^3+54x^4$

52) $(3+4x)\cdot(-9-6x+6x^2-2x^3)$ **R.** $-27-54x-6x^2+18x^3-6x^4$

53) $(1+7x)\cdot(-9-9x+4x^2-8x^3)$ **R.** $-9-72x-59x^2+20x^3-8x^4$

54) $(-3+7x)\cdot(6-3x-2x^2+7x^3)$ **R.** $-18+51x-15x^2-35x^3-21x^4$

55) $(-1-9x)\cdot(3+5x+3x^2-4x^3)$ **R.** $-3-32x-48x^2-23x^3+4x^4$

56) $(-7+2x)\cdot(5+x+x^2-8x^3)$ **R.** $-35+3x-5x^2+58x^3+56x^4$

57) $(7+3x)\cdot(6+4x-7x^2+6x^3)$ **R.** $42+46x-37x^2+21x^3+42x^4$

58) $(-5+7x)\cdot(2+8x+3x^2-8x^3)$ **R.** $-10-26x+41x^2+61x^3+40x^4$

59) $(-6-3x)\cdot(4-6x-3x^2-4x^3)$ **R.** $-24+24x+36x^2+33x^3+24x^4$

60) $(2+7x)\cdot(-7+3x-4x^2-5x^3)$ **R.** $-14-43x+13x^2-38x^3-10x^4$

61) $(-7+5x)\cdot(1+7x-5x^2-x^3)$ **R.** $-7-44x+70x^2-18x^3+7x^4$

62) $(4-7x)\cdot(-2-7x+x^2+5x^3)$ **R.** $-8-14x+53x^2+13x^3+20x^4$

63) $(6-3x)\cdot(6+9x-3x^2-2x^3)$ **R.** $36+36x-45x^2-3x^3-12x^4$

64) $(5+x)\cdot(-6+4x+x^2-2x^3)$ **R.** $-30+14x+9x^2-9x^3-10x^4$

65) $(-3-5x)\cdot(2-7x+8x^2+6x^3)$ **R.** $-6+11x+11x^2-58x^3-18x^4$

66) $(3-5x)\cdot(-8+7x+4x^2+7x^3)$ **R.** $-24+61x-23x^2+x^3+21x^4$

67) $(9+x)\cdot(5+9x-8x^2+9x^3)$ **R.** $45+86x-63x^2+73x^3+81x^4$

68) $(-5+4x)\cdot(-1-6x+6x^2+6x^3)$ **R.** $5+26x-54x^2-6x^3-30x^4$

69) $(7-2x)\cdot(-5-8x+x^2+5x^3)$ **R.** $-35-46x+23x^2+33x^3+35x^4$

70) $(-6+4x)\cdot(8+8x+6x^2-3x^3)$ **R.** $-48-16x-4x^2+42x^3+18x^4$

71) $(4-3x)\cdot(-8-4x+5x^2-5x^3)$ **R.** $-32+8x+32x^2-35x^3-20x^4$

72) $\dfrac{18-20x+74x^2-35x^3-27x^4}{9-1x}=$ **R.** $2-2x+8x^2-3x^3$

73) $\dfrac{-20+50x-42x^2+26x^3+8x^4}{4-6x}=$ **R.** $-5+5x-3x^2+2x^3$

74) $\dfrac{-5-21x+45x^2-50x^3+4x^4}{1+6x}=$ **R.** $-5+9x-9x^2+4x^3$

75) $\dfrac{-15-44x-38x^2+4x^3+12x^4}{-3-4x}=$ **R.** $5+8x+2x^2-4x^3$

76) $\dfrac{-7-40x-26x^2-7x^3-2x^4}{-1-5x}=$ **R.** $7+5x+1x^2+2x^3$

77) $\dfrac{24+79x+0x^2-1x^3+24x^4}{-8-5x}=$ **R.** $-3-8x+5x^2-3x^3$

78) $\dfrac{64+40x-68x^2-81x^3-72x^4}{-8-1x}=$ **R.** $-8-4x+9x^2+9x^3$

79) $\dfrac{-24+47x+5x^2+18x^3+24x^4}{8+3x}=$ **R.** $-3+7x-2x^2+3x^3$

80) $\dfrac{-24+58x+7x^2-55x^3-6x^4}{-6+7x}=$ **R.** $4-5x-7x^2+1x^3$

81) $\dfrac{21-2x-1x^2+39x^3+35x^4}{7+4x}=$ **R.** $3-2x+1x^2+5x^3$

82) $\dfrac{-35+37x-36x^2-39x^3-45x^4}{5-x}=$ **R.** $-7+6x-6x^2-9x^3$

83) $\dfrac{24-60x+48x^2-12x^3+6x^4}{-6+9x}=$ **R.** $-4+4x-2x^2-1x^3$

84) $\dfrac{-42+16x-25x^2+18x^3-7x^4}{7-5x}=$ **R.** $-6-2x-5x^2-1x^3$

85) $\dfrac{-15+23x-25x^2+49x^3+21x^4}{-3+4x}=$ **R.** $5-1x+7x^2-7x^3$

86) $\dfrac{40+49x+24x^2-74x^3-56x^4}{-8+3x}=$ **R.** $-5-8x-6x^2+7x^3$

87) $\dfrac{-5-31x-40x^2-57x^3-45x^4}{-5-6x}=$ **R.** $1+5x+2x^2+9x^3$

88) $\dfrac{-35-34x-9x^2-87x^3-45x^4}{5+7x}=$ **R.** $-7+3x-6x^2-9x^3$

89) $\dfrac{54-24x+17x^2+54x^3-18x^4}{-9-8x}=$ **R.** $-6+8x-9x^2+2x^3$

90) $\dfrac{10-2x+17x^2+5x^3-15x^4}{5+4x}=$ **R.** $2-2x+5x^2-3x^3$

91) $\dfrac{-35+58x+37x^2-59x^3-63x^4}{-7-x}=$ **R.** $5-9x-4x^2+9x^3$

92) $\dfrac{-3-18x+27x^2+44x^3+2x^4}{1+7x}=$ **R.** $-3+3x+6x^2+2x^3$

93) $\dfrac{30+33x-72x^2+72x^3+48x^4}{-6+3x}=$ **R.** $-5-8x+8x^2-8x^3$

94) $\dfrac{-6-31x-10x^2+22x^3-14x^4}{-2-9x}=$ **R.** $3+2x-4x^2+7x^3$

95) $\dfrac{-72-9x+105x^2-45x^3-72x^4}{8+9x}=$ **R.** $-9+9x+3x^2-9x^3$

2.2.3 Productos notables

Cuando realizamos operaciones entre polinomios con el fin de resolver problemas, es muy frecuente encontrar algunas operaciones que por su naturaleza, aparecen en muchos fenómenos.

Debido a que las vamos a encontrar muy seguido, las llamamos *productos notables*, porque también, una vez identificado el tipo de producto, podemos decir el resultado de esa operación sin necesidad de realizarla...

La realidad es que la memorizamos para no tener que desarrollar el producto cada vez que la encontremos.

Cada uno de los productos notables tiene su nombre.

Definición 1

PRODUCTOS NOTABLES

Los productos notables más comunes son:

(i) *Binomio al cuadrado (suma).* $(x+a)^2 = x^2 + 2\,a\,x + a^2$

(ii) *Binomio al cuadrado (diferencia).* $(x-a)^2 = x^2 - 2\,a\,x + a^2$

(iii) *Producto de binomios con término común.* $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)\,x + a\,b$

(iv) *Producto conjugado.* $(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$

(v) *Binomio al cubo.* $(x+a)^3 = x^3 + 3\,a\,x^2 + 3\,a^2\,x + a^3$

Para entender los productos notables puedes imaginarlos como si se tratara de un molde.

Tú debes realizar lo que el molde dice, de acuerdo a los valores que debes asignar a cada parte del molde.

Ejemplo 1 Calcula: $(2\,m+7)^2 =$

- Primero identificamos el producto notable con el que vamos a trabajar.
- En este caso se trata de un binomio que está elevado al cuadrado, es decir, el producto notable *(i)*.
- Es muy sencillo observar que podemos sustituir los valores de acuerdo a la fórmula:

$$(x+a)^2 = (x)^2 + 2(a)(x) + (a)^2$$

- Si sustituimos y luego realizamos los cálculos que quedan indicados, terminamos:

$$\begin{aligned} (x+a)^2 &= (x)^2 + 2(a)(x) + (a)^2 \\ (2\,m+7)^2 &= (2\,m)^2 + 2(7)(2\,m) + (7)^2 \\ &= 4\,m^2 + 28\,m + 49 \end{aligned}$$

- Esto significa que:

$$(2\,m+7)^2 = 4\,m^2 + 28\,m + 49$$

Ejemplo 2 Calcula: $(3\,z-4)^2 =$

- Sustituimos en la fórmula del producto notable correpondiente:

$$\begin{aligned} (x-a)^2 &= (x)^2 - 2(a)(x) + (a)^2 \\ \left(3\,z^2-4\right)^2 &= \left(3\,z^2\right)^2 - 2\,(4)\left(3\,z^2\right) + (4)^2 \\ &= 9\,z^4 - 24\,z^2 + 16 \end{aligned}$$

- Aunque, también pudimos haberlo calculado con el producto notable *(i)*, considerando: $a = -4$.

$$\begin{aligned} (x+a)^2 &= (x)^2 + 2(a)(x) + (a)^2 \\ \left(3\,z^2+(-4)\right)^2 &= \left(3\,z^2\right)^2 + 2\,(-4)\left(3\,z^2\right) + (-4)^2 \\ &= 9\,z^4 - 24\,z^2 + 16 \end{aligned}$$

- Así, podemos concluir que los productos notables *(i)* y *(ii)* son el mismo.

Algunas veces necesitarás elevar un binomio al cuadrado con coeficientes fraccionarios. El siguiente ejemplo muestra uno de esos casos.

Calcula: $\left(\frac{1}{2}x+4y^2\right)^2 =$	**Ejemplo 3**

- Empezamos identificando al producto notable que se trata: en este caso, es un binomio al cuadrado.
- Ahora aplicamos la fórmula que le corresponde:

$$\left(\frac{1}{2}x+4y^2\right)^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2+2\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot(4y^2)+\left(4y^2\right)^2$$

- Ahora simplemente realizamos las operaciones que quedaron indicadas:

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^2+2\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot\left(4y^2\right)+\left(4y^2\right)^2=\frac{1}{4}x^2+4xy^2+16y^4$$

- Observa que hemos aplicado leyes de los exponentes.

Ahora estudiaremos el caso del producto de dos binomios con un término común. Empezamos con un ejemplo muy sencillo.

Calcula: $(x+5)(x-7)=$	**Ejemplo 4**

- Ahora tenemos que utilizar el producto notable:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

- En este caso, $a=5$, y $b=-7$.

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) &= x^2+(a+b)x+ab\\ (x+5)(x-7) &= x^2+(5+(-7))x+(5)(-7)\\ &= x^2-2x-35\end{aligned}$$

- En conclusión,

$$(x+5)(x-7)=x^2-2x-35$$

Algunas veces, además de aplicar el producto notable que le corresponde a la operación que estamos desarrollando debemos aplicar las leyes de los exponentes.

Calcula: $(x^3+1)(x^3+5)=$	**Ejemplo 5**

- Este producto también requiere del uso de la fórmula:

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

- Pero en este caso requiere además de la aplicación de las leyes de los exponentes:

$$\begin{aligned}(x^3+1)(x^3+5) &= \left(x^3\right)^2+(1+5)\cdot x^3+1\cdot 5\\ &= x^6+6x^3+5\end{aligned}$$

- Observa que cuando sustituimos en la fórmula los términos del ejercicio, nos queda en el primer término: $\left(x^3\right)^2$, lo cual nos exige la aplicación de las leyes de los exponentes.

También debes tener cuidado cuando tengas un coeficiente en alguno de los términos, porque muchas veces se omite multiplicar por él.

Ejemplo 6 Calcula: $(2x+11)(2x-13)=$

- Aplicamos directamente los términos a la fórmula:

$$\begin{aligned}(2x+11)(2x-13) &= (2x)^2+(11-13)\cdot(2x)+(11)\cdot(-13)\\ &= 4x^2+(-2)\cdot(2x)-143\\ &= 4x^2-4x-143\end{aligned}$$

- Observa que hemos aplicado las leyes de los signos cuando multiplicamos $(11)\cdot(-13)$.
- También es importante notar que al sumar $11-13$ obtenemos un número negativo, porque el mayor de los sumandos es menor a cero.
- En este último caso **no** se han aplicado las leyes de los signos.
- Por ejemplo, la suma: $13-11=2$. Un número positivo, a pesar de que un sumando es positivo y otro es negativo.

Cuando aplicamos las leyes de los signos generalmente decimos «*menos por más*», o «*menos por menos*». Observa, siempre utilizamos la palabra «*por*» entre los dos signos. Esto indica que estamos multiplicando los signos. Por eso no podemos utilizarlos cuando estamos sumando. Solamente para la multiplicación o para la división.

Seguramente ahora tendrás la pregunta: «*¿por qué para la división también, si no estamos diciendo menos entre mas?*»

Recuerda que dividir es igual a multiplicar por el recíproco. Por ejemplo, dividir por 2 es igual que multiplicar por el recíproco de 2, es decir, es igual que multiplicar por $1/2$.

Podemos justificar el uso de las leyes de los signos en la división si observamos que las operaciones de multiplicación y división son contrarias basados en las leyes de los signos mismas.

Hasta aquí hemos visto cómo desarrollar binomios al cuadrado y producto de binomios con un término común. Ahora vamos a estudiar el producto conjugado.

Ejemplo 7 Calcula: $(3u+5v)(3u-5v)=$

- Empezamos notando que se trata de un producto conjugado.
- Eso significa que utilizaremos la fórmula:

$$\begin{aligned}(x+a)(x-a) &= (x)^2-(a)^2\\ (3u+5v)(3u-5v) &= (3u)^2-(5v)^2\\ &= 9u^2-25v^2\end{aligned}$$

- Esto nos indica que:
$$(3u+5v)(3u-5v)=9u^2-25v^2$$

Observa que en realidad estamos aplicando las leyes de los exponentes y de los signos. Sin embargo, nos ahorramos todo el procedimiento al aplicar directamente la fórmula. Para verificar que estamos aplicando debes realizar el producto sin aplicar el producto notable.

Calcula: $(3x^2+11)(3x^2-11)=$ **Ejemplo 8**

- Empezamos aplicando directamente la fórmula:
$$\begin{aligned}(3x^2+11)(3x^2-11) &= \left(3x^2\right)^2-11^2\\ &= 9x^4-121\end{aligned}$$

- Una segunda forma de verificar el resultado consiste en aplicar el producto conjugado que corresponde al producto de binomios con un término común.
- Aplicando esta fórmula, obtenemos:
$$\begin{aligned}(3x^2+11)(3x^2-11) &= \left(3x^2\right)^2+(11-11)(3x^2)+(11)(-11)\\ &= 9x^4+0(3x^2)-121\\ &= 9x^4-121\end{aligned}$$

En ambos casos obtenemos el mismo resultado porque el producto conjugado es un caso especial del producto de binomios con un término común.

Calcula: $\left(\dfrac{m^3}{4}+\dfrac{12}{13}\right)\left(\dfrac{m^3}{4}-\dfrac{12}{13}\right)=$ **Ejemplo 9**

- Aplicamos la fórmula:
$$\begin{aligned}\left(\frac{m^3}{4}+\frac{12}{13}\right)\left(\frac{m^3}{4}-\frac{12}{13}\right) &= \left(\frac{m^3}{4}\right)^2-\left(\frac{12}{13}\right)^2\\ &= \frac{m^6}{16}-\frac{144}{169}\end{aligned}$$

- Recuerda que elevar al cuadrado significa multiplicar un número por sí mismo.
- Elevar al cuadrado **no** significa miltiplicar por 2.
- Por ejemplo, $9^2=9\times 9=81$, es correcto, pero
- $9^2\neq 9\times 2=18$ no es la forma correcta de proceder.
- Ten cuidado con esto.

Finalmente unos ejemplos para aprender a elevar un binomio al cubo.

Calcula: $(2m+5)^3=$ **Ejemplo 10**

- Ahora tenemos un binomio elevado al cubo.
- Empezamos sustituyendo los valores en donde les corresponde:

$$\begin{aligned}(x+a)^3 &= (x)^3+3(a)(x)^2+3(a)^2(x)+(a)^3\\ (2\,m+5)^3 &= (2\,m)^3+3(5)(2\,m)^2+3(5)^2(2\,m)+(5)^3\\ &= 8\,m^3+60\,m^2+150\,m+125\end{aligned}$$

- Entonces,

$$(2\,m+5)^3=8\,m^3+60\,m^2+150\,m+125$$

Ejemplo 11 Calcula: $(2\,r-5)^3=$

- En este caso tenemos una diferencia elevada al cubo.
- Como se trata de un binomio, podemos aplicar la fórmula:

$$(x+a)^3=(x)^3+3(a)(x)^2+3(a)^2(x)+(a)^3$$

- Pero debemos tener cuidado con los signos...

$$\begin{aligned}(2\,r-5)^3 &= (2\,r)^3+3(-5)(2\,r)^2+3(-5)^2(2\,r)+(-5)^3\\ &= 8\,r^3+(-15)(4\,r^2)+6\,r\,(25)-125\\ &= 8\,r^3-60\,r^2+150\,r-125\end{aligned}$$

- Observa que cuando un factor está elevado al cuadrado debemos elevarlo al cuadrado antes de multiplicarlo por los demás factores.

Observa también que cuando multiplicamos, el orden en que realizamos las multiplicaciones, cuando se trata de varios factores, no importa; siempre obtenemos el mismo resultado. Esto es así por la propiedad de conmutatividad de la multiplicación de los números reales.

Ejemplo 12 Calcula: $\left(\dfrac{2\,x}{3}+\dfrac{r^2}{5}\right)^3=$

- No tienes por qué sentir pánico al ver la expresión que debemos elevar al cubo.
- Simplemente la vamos a tratar como a las anteriores: sustituimos los términos en la fórmula, realizamos las operaciones que quedan indicadas y simplificamos hasta donde sea posible:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2\,x}{3}+\frac{r^2}{5}\right)^3 &= \left(\frac{2\,x}{3}\right)^3+3\left(\frac{r^2}{5}\right)\left(\frac{2\,x}{3}\right)^2+3\left(\frac{r^2}{5}\right)^2\left(\frac{2\,x}{3}\right)+\left(\frac{r^2}{5}\right)^3\\ &= \frac{8\,x^3}{27}+\left(\frac{3\,r^2}{5}\right)\left(\frac{4\,x^2}{9}\right)+\left(\frac{6\,x}{3}\right)\left(\frac{r^4}{25}\right)+\frac{r^6}{125}\\ &= \frac{8\,x^3}{27}+\frac{12\,r^2\,x^2}{45}+\frac{6\,x\,r^4}{75}+\frac{r^6}{125}\\ &= \frac{8\,x^3}{27}+\frac{4\,r^2\,x^2}{15}+\frac{2\,x\,r^4}{25}+\frac{r^6}{125}\end{aligned}$$

- Recuerda simplificar las fracciones siempre que sea posible.
- Debes tener cuidado al elevar al cubo un número.
- Elevar al cubo significa multiplicar por sí mismo tres veces, no multiplicar por 3.
- Por ejemplo, $2^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$, pero
- $2^3 \neq 2 \times 3 = 6$, es un error común en muchos estudiantes.

En cualquiera de los casos que se desarrollan en este tema, podemos verificar que los resultados son los correctos desarrollando la multiplicación indicada en cada caso utilizando el procedimiento que aprendimos en el tema anterior.

Evidentemente, el procedimiento será más laborioso que la aplicación de los productos notables.

De hecho, los productos notables se utilizan para realizar más rápido esos cálculos.

Desarrolla cada uno de los siguientes productos notables. **Ejercicios 2.2.3**

1) $(-1+2x)^2 =$ **R.** $1-4x+4x^2$

2) $(4+9m)^2 =$ **R.** $16+72m+81m^2$

3) $(7+m)^2 =$ **R.** $49+14m+m^2$

4) $(4+r)^2 =$ **R.** $16+8r+r^2$

5) $(5+7r)^2 =$ **R.** $25+70r+49r^2$

6) $(8-8x)^2 =$ **R.** $64-128x+64x^2$

7) $(-9-8x)^2 =$ **R.** $81+144x+64x^2$

8) $(-2-8x)^2 =$ **R.** $4+32x+64x^2$

9) $(6+8v)^2 =$ **R.** $36+96v+64v^2$

10) $(-1+5v)^2 =$ **R.** $1-10v+25v^2$

11) $(3+5v)^2 =$ **R.** $9+30v+25v^2$

12) $(7+4x)^2 =$ **R.** $49+56x+16x^2$

13) $(5-4a)^2 =$ **R.** $25-40a+16a^2$

14) $(6+9v)^2 =$ **R.** $36+108v+81v^2$

15) $(2+5v)^2 =$ **R.** $4+20v+25v^2$

16) $(7-8v)^2 =$ **R.** $49-112v+64v^2$

17) $(-3-v)^2 =$ **R.** $9+6v+v^2$

18) $(-8-9v)^2 =$ **R.** $64+144v+81v^2$

19) $(5-v)^2 =$ **R.** $25-10v+v^2$

20) $(3+7v)^2 =$ **R.** $9+42v+49v^2$

21) $(-5+v)^2=$ **R.** $25-10\,v+v^2$

22) $(9+6\,v)^2=$ **R.** $81+108\,v+36\,v^2$

23) $(1+3\,v)^2=$ **R.** $1+6\,v+9\,v^2$

24) $(-4+3\,v)^2=$ **R.** $16-24\,v+9\,v^2$

25) $(-7+6\,v)^2=$ **R.** $49-84\,v+36\,v^2$

26) $\left(2+\frac{5\,v}{9}\right)^2=$ **R.** $4+\frac{20\,v}{9}+\frac{25\,v^2}{81}$

27) $\left(\frac{4}{3}-7\,v\right)^2=$ **R.** $\frac{16}{9}-\frac{56\,v}{3}+49\,v^2$

28) $\left(\frac{1}{2}+\frac{2\,v}{3}\right)^2=$ **R.** $\frac{1}{4}+\frac{2\,v}{3}+\frac{4\,v^2}{9}$

29) $\left(\frac{9}{5}+\frac{7\,v}{9}\right)^2=$ **R.** $\frac{81}{25}+\frac{126\,v}{45}+\frac{49\,v^2}{81}$

30) $\left(\frac{5}{4}-3\,v\right)^2=$ **R.** $\frac{25}{16}-\frac{15\,v}{2}+9\,v^2$

31) $\left(\frac{5}{7}-\frac{4\,v}{3}\right)^2=$ **R.** $\frac{25}{49}-\frac{40\,v}{21}+\frac{16\,v^2}{9}$

32) $\left(\frac{1}{2}+\frac{7\,v}{9}\right)^2=$ **R.** $\frac{1}{4}-\frac{7\,v}{9}+\frac{49\,v^2}{81}$

33) $\left(\frac{1}{5}+\frac{v}{7}\right)^2=$ **R.** $\frac{1}{25}+\frac{2\,v}{35}+\frac{v^2}{49}$

34) $\left(-\frac{2}{3}+\frac{7\,v}{4}\right)^2=$ **R.** $\frac{4}{9}-\frac{7\,v}{3}+\frac{49\,v^2}{16}$

35) $\left(-\frac{1}{3}+\frac{v}{3}\right)^2=$ **R.** $\frac{1}{9}-\frac{2\,v}{9}+\frac{v^2}{9}$

36) $\left(-\frac{5}{2}-6\,v\right)^2=$ **R.** $\frac{25}{4}+30\,v+36\,v^2$

37) $\left(\frac{1}{5}-\frac{3\,v}{8}\right)^2=$ **R.** $\frac{1}{25}-\frac{6\,v}{40}+\frac{9\,v^2}{64}$

38) $\left(-\frac{2}{7}+2\,v\right)^2=$ **R.** $\frac{4}{49}-\frac{4\,v}{7}+4\,v^2$

39) $\left(-\frac{1}{5}-\frac{v}{7}\right)^2=$ **R.** $\frac{1}{25}+\frac{2\,v}{35}+\frac{v^2}{49}$

40) $\left(-\frac{1}{3}-\frac{9\,v}{5}\right)^2=$ **R.** $\frac{1}{9}+\frac{6\,v}{5}+\frac{81\,v^2}{25}$

41) $\left(\frac{2}{3}-\frac{7\,v}{3}\right)^2=$ **R.** $\frac{4}{9}-\frac{28\,v}{9}+\frac{49\,v^2}{9}$

42) $\left(-\frac{8}{3}+\frac{v}{3}\right)^2 =$ **R.** $\frac{64}{9}-\frac{16\,v}{9}+\frac{v^2}{9}$

43) $\left(-\frac{5}{9}+\frac{5\,v}{7}\right)^2 =$ **R.** $\frac{25}{81}-\frac{50\,v}{63}+\frac{25\,v^2}{49}$

44) $(-3\,x-5\,y)(-3\,x+5\,y)=$ **R.** $9\,x^2-25\,y^2$

45) $(-6\,x+5\,y)(-6\,x-5\,y)=$ **R.** $36\,x^2-25\,y^2$

46) $(-7\,x-2\,y)(-7\,x+2\,y)=$ **R.** $49\,x^2-4\,y^2$

47) $(6\,m-7\,n)(6\,m+7\,n)=$ **R.** $36\,m^2-49\,n^2$

48) $(-7\,m+3\,n)(-7\,m-3\,n)=$ **R.** $49\,m^2-9\,n^2$

49) $(-8\,u+8\,v^2)(-8\,u-8\,v^2)=$ **R.** $64\,v^2-64\,v^4$

50) $(-7\,u+8\,v^2)(-7\,u-8\,v^2)=$ **R.** $49\,v^2-64\,v^4$

51) $(-9\,u+v^2)(-9\,u-v^2)=$ **R.** $81\,v^2-v^4$

52) $(4\,u-3\,v^2)(4\,u+3\,v^2)=$ **R.** $16\,v^2-9\,v^4$

53) $(-6\,u-5\,v^2)(-6\,u+5\,v^2)=$ **R.** $36\,v^2-25\,v^4$

54) $(8\,u+2\,v^2)(8\,u-2\,v^2)=$ **R.** $64\,v^2-4\,v^4$

55) $(-u+8\,v^2)(-u-8\,v^2)=$ **R.** $v^2-64\,v^4$

56) $(-3\,u+8\,v^2)(-3\,u-8\,v^2)=$ **R.** $9\,v^2-64\,v^4$

57) $(-5\,u-v^2)(-5\,u+v^2)=$ **R.** $25\,v^2-v^4$

58) $(-7\,u-6\,v^2)(-7\,u+6\,v^2)=$ **R.** $49\,v^2-36\,v^4$

59) $(-7\,u+5\,v^2)(-7\,u-5\,v^2)=$ **R.** $49\,v^2-25\,v^4$

60) $(-u+7\,v^2)(-u-7\,v^2)=$ **R.** $v^2-49\,v^4$

61) $(9\,u+6\,v^2)(9\,u-6\,v^2)=$ **R.** $81\,v^2-36\,v^4$

62) $\left(\frac{8\,u}{7}+2\,v^2\right)\left(\frac{8\,u}{7}-2\,v^2\right)=$ **R.** $\frac{64\,u^2}{49}-4\,v^4$

63) $\left(\frac{3\,u}{5}+\frac{8\,v^2}{9}\right)\left(\frac{3\,u}{5}-\frac{8\,v^2}{9}\right)=$ **R.** $\frac{9\,u^2}{25}-\frac{64\,v^4}{81}$

64) $\left(\frac{8\,u}{5}+\frac{3\,v^2}{8}\right)\left(\frac{8\,u}{5}-\frac{3\,v^2}{8}\right)=$ **R.** $\frac{64\,u^2}{25}-\frac{9\,v^4}{64}$

65) $\left(\frac{7\,u}{2}+\frac{8\,v^2}{7}\right)\left(\frac{7\,u}{2}-\frac{8\,v^2}{7}\right)=$ **R.** $\frac{49\,u^2}{4}-\frac{64\,v^4}{49}$

66) $\left(\frac{5\,u}{9}+\frac{v^2}{2}\right)\left(\frac{5\,u}{9}-\frac{v^2}{2}\right)=$ **R.** $\frac{25\,u^2}{81}-\frac{v^4}{4}$

67) $\left(\frac{3\,u}{4}+\frac{9\,v^2}{8}\right)\left(\frac{3\,u}{4}-\frac{9\,v^2}{8}\right)=$ **R.** $\frac{9\,u^2}{16}-\frac{81\,v^4}{64}$

68) $\left(\frac{5\,u}{4}+7\,v^2\right)\left(\frac{5\,u}{4}-7\,v^2\right)=$ **R.** $\frac{25\,u^2}{16}-49\,v^4$

69) $\left(\frac{2\,u}{3}+\frac{2\,v^2}{9}\right)\left(\frac{2\,u}{3}-\frac{2\,v^2}{9}\right)=$ **R.** $\frac{4\,u^2}{9}-\frac{4\,v^4}{81}$

70) $\left(\frac{u}{2}+\frac{5\,v^2}{9}\right)\left(\frac{u}{2}-\frac{5\,v^2}{9}\right)=$ **R.** $\frac{u^2}{4}-\frac{25\,v^4}{81}$

71) $\left(\frac{9\,u}{4}+\frac{v^2}{6}\right)\left(\frac{9\,u}{4}-\frac{v^2}{6}\right)=$ **R.** $\frac{81\,u^2}{16}-\frac{v^4}{36}$

72) $\left(\frac{3\,u}{4}+\frac{4\,v^2}{5}\right)\left(\frac{3\,u}{4}-\frac{4\,v^2}{5}\right)=$ **R.** $\frac{9\,u^2}{16}-\frac{16\,v^4}{25}$

73) $\left(\frac{4\,u}{7}+\frac{7\,v^2}{8}\right)\left(\frac{4\,u}{7}-\frac{7\,v^2}{8}\right)=$ **R.** $\frac{16\,u^2}{49}-\frac{49\,v^4}{64}$

74) $\left(3\,u+\frac{7\,v^2}{8}\right)\left(3\,u-\frac{7\,v^2}{8}\right)=$ **R.** $9\,u^2-\frac{49\,v^4}{64}$

75) $\left(\frac{5\,u}{3}+\frac{3\,v^2}{8}\right)\left(\frac{5\,u}{3}-\frac{3\,v^2}{8}\right)=$ **R.** $\frac{25\,u^2}{9}-\frac{9\,v^4}{64}$

76) $\left(\frac{9\,u}{4}+,v^2\right)\left(\frac{9\,u}{4}-v^2\right)=$ **R.** $\frac{81\,u^2}{16}-v^4$

77) $\left(\frac{9\,u}{4}+\frac{2\,v^2}{3}\right)\left(\frac{9\,u}{4}-\frac{2\,v^2}{3}\right)=$ **R.** $\frac{81\,u^2}{16}-\frac{4\,v^4}{9}$

78) $\left(\frac{9\,u}{4}+\frac{5\,v^2}{4}\right)\left(\frac{9\,u}{4}-\frac{5\,v^2}{4}\right)=$ **R.** $\frac{81\,u^2}{16}-\frac{25\,v^4}{16}$

79) $\left(\frac{3\,u}{7}+\frac{2\,v^2}{9}\right)\left(\frac{3\,u}{7}-\frac{2\,v^2}{9}\right)=$ **R.** $\frac{9\,u^2}{49}-\frac{4\,v^4}{81}$

80) $\left(\frac{8\,u}{9}+\frac{3\,v^2}{4}\right)\left(\frac{8\,u}{9}-\frac{3\,v^2}{4}\right)=$ **R.** $\frac{64\,u^2}{81}-\frac{9\,v^4}{16}$

81) $\left(\frac{4\,u}{5}+\frac{3\,v^2}{2}\right)\left(\frac{4\,u}{5}-\frac{3\,v^2}{2}\right)=$ **R.** $\frac{16\,u^2}{25}-\frac{9\,v^4}{4}$

82) $\left(\frac{7\,u}{9}+\frac{8\,v^2}{7}\right)\left(\frac{7\,u}{9}-\frac{8\,v^2}{7}\right)=$ **R.** $\frac{49\,u^2}{81}-\frac{64\,v^4}{49}$

83) $\left(\frac{2\,u}{9}+\frac{5\,v^2}{9}\right)\left(\frac{2\,u}{9}-\frac{5\,v^2}{9}\right)=$ **R.** $\frac{4\,u^2}{81}-\frac{25\,v^4}{81}$

84) $\left(\frac{9\,u}{4}+\frac{7\,v^2}{6}\right)\left(\frac{9\,u}{4}-\frac{7\,v^2}{6}\right)=$ **R.** $\frac{81\,u^2}{16}-\frac{49\,v^4}{36}$

85) $\left(\frac{9\,u}{11}+\frac{v^2}{7}\right)\left(\frac{9\,u}{11}-\frac{v^2}{7}\right)=$ **R.** $\frac{81\,u^2}{121}-\frac{v^4}{49}$

86) $(3\,x-y)^3=$ **R.** $27\,x^3-27\,x^2y+9\,xy^2-y^3$

87) $(4\,x-6\,y)^3=$ **R.** $64\,x^3-288\,x^2y+432\,xy^2-216\,y^3$

88) $(8\,x+5\,y)^3=$ **R.** $512\,x^3+960\,x^2y+600\,xy^2+125\,y^3$

89) $(9\,x-5\,y)^3=$ **R.** $729\,x^3-1215\,x^2y+675\,xy^2-125\,y^3$

90) $(3\,x-5\,y)^3=$ **R.** $27\,x^3-135\,x^2y+225\,xy^2-125\,y^3$

91) $(7x+2y)^3 =$ **R.** $343x^3+294x^2y+84xy^2+8y^3$

92) $(5x+6y)^3 =$ **R.** $125x^3+450x^2y+540xy^2+216y^3$

93) $(9x-5y)^3 =$ **R.** $729x^3-1215x^2y+675xy^2-125y^3$

94) $(6x+5y)^3 =$ **R.** $216x^3+540x^2y+450xy^2+125y^3$

95) $(2x-5y)^3 =$ **R.** $8x^3-60x^2y+150xy^2-125y^3$

96) $\left(\frac{8x}{5}-\frac{4y}{3}\right)^3 =$ **R.** $\frac{512x^3}{125}-\frac{768x^2y}{75}+\frac{384xy^2}{45}-\frac{64y^3}{27}$

97) $\left(\frac{x}{9}-\frac{y}{2}\right)^3 =$ **R.** $\frac{x^3}{729}+\frac{-9x^2y}{486}+\frac{27xy^2}{324}+\frac{-27y^3}{216}$

98) $\left(\frac{4x}{9}-\frac{9y}{5}\right)^3 =$ **R.** $\frac{64x^3}{729}-\frac{432x^2y}{405}+\frac{972xy^2}{225}-\frac{729y^3}{125}$

99) $\left(\frac{9x}{2}+\frac{y}{5}\right)^3 =$ **R.** $\frac{729x^3}{8}+\frac{243x^2y}{20}+\frac{27xy^2}{50}+\frac{y^3}{125}$

100) $\left(\frac{x}{2}+\frac{8y}{3}\right)^3 =$ **R.** $\frac{x^3}{8}+2x^2y+\frac{32xy^2}{3}+\frac{512y^3}{27}$

101) $\left(\frac{4x}{3}+9y\right)^3 =$ **R.** $\frac{64x^3}{27}+\frac{432x^2y}{9}+\frac{972xy^2}{3}+729y^3$

102) $\left(\frac{2x}{3}+\frac{8y}{3}\right)^3 =$ **R.** $\frac{8x^3}{27}+\frac{32x^2y}{9}+\frac{128xy^2}{9}+\frac{512y^3}{27}$

103) $\left(\frac{3x}{4}+\frac{3y}{7}\right)^3 =$ **R.** $\frac{27x^3}{64}+\frac{81x^2y}{112}+\frac{81xy^2}{196}+\frac{27y^3}{343}$

104) $\left(2x-\frac{7y}{5}\right)^3 =$ **R.** $8x^3-\frac{84x^2y}{5}+\frac{294xy^2}{25}-\frac{343y^3}{125}$

105) $\left(\frac{8x}{3}+\frac{9y}{5}\right)^3 =$ **R.** $\frac{512x^3}{27}+\frac{1728x^2y}{45}+\frac{1944xy^2}{75}+\frac{729y^3}{125}$

106) $\left(\frac{5x}{4}-\frac{3y}{2}\right)^3 =$ **R.** $\frac{125x^3}{64}-\frac{225x^2y}{32}+\frac{135xy^2}{16}-\frac{27y^3}{8}$

107) $\left(\frac{8x}{5}-\frac{3y}{5}\right)^3 =$ **R.** $\frac{512x^3}{125}-\frac{576x^2y}{125}+\frac{216xy^2}{125}-\frac{27y^3}{125}$

108) $\left(\frac{x}{7}-\frac{6y}{7}\right)^3 =$ **R.** $\frac{x^3}{343}-\frac{18x^2y}{343}+\frac{108xy^2}{343}-\frac{216y^3}{343}$

109) $\left(\frac{7x}{9}-\frac{4y}{3}\right)^3 =$ **R.** $\frac{343x^3}{729}-\frac{588x^2y}{243}+\frac{336xy^2}{81}-\frac{64y^3}{27}$

110) $\left(\frac{3x}{2}+6y\right)^3 =$ **R.** $\frac{27x^3}{8}+\frac{81x^2y}{2}+\frac{162xy^2}{4}+216y^3$

111) $\left(\frac{x}{3}-\frac{2y}{3}\right)^3 =$ **R.** $\frac{x^3}{27}-\frac{6x^2y}{27}+\frac{12xy^2}{27}-\frac{8y^3}{27}$

2.2.4 Triángulo de Pascal

En matemáticas hay muchos *trucos* para simplificar los procedimientos y cálculos.

Para los productos notables el *truco* consiste en el triángulo de Pascal.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Para formarlo empezamos con el 1 del primer renglón. Después escribimos el segundo renglón: 1 1. Para obtener los siguientes renglones siempre vamos a sumar los números que estén uno al lado del otro.

Por ejemplo, para obtener el 2 que está en el tercer renglón sumamos 1+1 del segundo renglón.

Cada renglón n contiene los coeficientes del binomio elevado a la potencia $n-1$.

$$
\begin{array}{cccccccccccl}
 & & & & & 1 & & & & & & \longrightarrow (x+a)^0 \\
 & & & & 1 & + & 1 & & & & & \longrightarrow (x+a)^1 \\
 & & & 1 & + & 2 & + & 1 & & & & \longrightarrow (x+a)^2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \longrightarrow (x+a)^3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \longrightarrow (x+a)^4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \longrightarrow (x+a)^5
\end{array}
$$

Si observas el triángulo de Pascal, en el segundo renglón tenemos los coeficientes de $(x+a)^1 = a+b$, que son 1 y 1. En el tercer renglón tenemos los coeficientes de $(x+a)^2 = x^2+2\,a\,x+a^2$, que son 1, 2 y 1, y así sucesivamente.

Una forma sencilla de encontrar los coeficientes del resultado de elevar el binomio $(x+a)^n$ consiste en observar el segundo coeficiente. Si el coeficiente es n, esos son los que buscas. Por ejemplo, el renglón donde el segundo coeficiente 5 indica que son los coeficientes del resultado de elevar $(x+a)^5$.

Ejemplo 1 Calcular: $(x+a)^5 =$

- Empezamos escribiendo los coeficientes que tomamos del renglón que corresponde. Después escribimos la literal x junto a todos los coeficientes:

$$1\,x \qquad 5\,x \qquad 10\,x \qquad 10\,x \qquad 5\,x \qquad 1\,x$$

- Ahora vamos a escribir los exponentes de esas literales. Empezamos con el exponente al cual estamos elevando el binomio, en este caso, 5, y conforme avanzamos a la derecha, los exponentes van disminuyendo, uno en cada literal:

$$1\,x^5 \qquad 5\,x^4 \qquad 10\,x^3 \qquad 10\,x^2 \qquad 5\,x^1 \qquad 1\,x^0$$

- Ahora escribimos la otra literal, a junto a cada literal x:

$$1\,x^5 a \qquad 5\,x^4 a \qquad 10\,x^3 a \qquad 10\,x^2 a \qquad 5\,x^1 a \qquad 1\,x^0 a$$

- El siguiente paso consiste en escribir los exponentes de a. Ahora empezamos *de izquierda a derecha*, también empezando con el exponente al cual estamos elevando el binomio:

$$1\,x^5 a^0 \qquad 5\,x^4 a^1 \qquad 10\,x^3 a^2 \qquad 10\,x^2 a^3 \qquad 5\,x^1 a^4 \qquad 1\,x^0 a^5$$

  Observa que la suma de los exponentes de cada término es igual al exponente al cual estamos elevando el binomio.

- Ahora lo único que falta es escribir los signos de $+$ entre los términos y simplificar usando la ley *(iv)*.

$$(x+a)^5 = x^5 + 5\,x^4 a^1 + 10\,x^3 a^2 + 10\,x^2 a^3 + 5\,x^1 a^4 + a^5$$

Puedes verificar que este resultado es correcto multiplicando el binomio $x+a$ por sí mismo cinco veces.

Como ves, este método es muy directo. Solo se requiere escribir el triángulo de Pascal hasta el renglón $n+1$ para calcular $(x+a)^n$. Sin embargo, hay otro método más corto, este método se conoce como el Binomio de Newton.

Binomio de Newton

El binomio de Newton es otro artificio matemático que puede utilizarse para calcular la potencia de un binomio.

En este caso se requieren algunos conceptos previos.

Factorial
El factorial del número natural n, que se denota $n!$, es igual al producto de todos los números naturales, desde 1 hasta n.

$$n! = n\,(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

Definición 1

Una definición que se utiliza en el binomio de Newton, y que depende de la definición de factorial, es la siguiente:

Combinaciones
El número de combinaciones de m objetos distintos, tomando k objetos a la vez, es:

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!}$$

Definición 2

En el binomio de Newton se consideran las combinaciones porque para justificar este método se utiliza un método de multiplicación que se conoce como el *exponente fijo*, y este método consiste en buscar de cuántas formas distintas podemos multiplicar los términos de dos polinomios para obtener un exponente dado.

Ahora, la definición del binomio de Newton.

Binomio de Newton
La potencia de un binomio puede calcularse con la siguiente fórmula:

$$(x+a)^n = \binom{n}{0}\,x^n + \binom{n}{1}\,x^{n-1}\,a + \cdots + \binom{n}{n-1}\,x\,a^{n-1} + \binom{n}{n}\,a^n$$

Definición 3

Una pregunta que seguramente tendrás es la siguiente, ¿por qué 0!=1?

He aquí la justificación.

Teorema 1 $0! = 1$

Sabemos que el factorial tiene la siguiente propiedad:

$$(k+1)! = (k+1)\cdot k!$$

por la forma como se definió. Si hacemos $k=0$, obtenemos:

$$\begin{aligned} (0+1)! &= (0+1)\cdot 0! \\ 1! &= 1\cdot 0! \\ 1 &= 0! \end{aligned}$$

■

Con este método, no se requiere calcular los coeficientes de las potencias anteriores del binomio que vamos a elevar a la potencia n, sino que de manera directa los calculamos.

Por ejemplo, si necesitamos calcular $(x+a)^{100}$, con el triángulo de Pascal tendríamos que encontrar los cien renglones anteriores para poder conocer los coeficientes de este polinomio (están en el renglón 101), pero con el binomio de Newton, podemos encontrarlos directamente a través de las combinaciones.

Como ejemplo, vamos a calcular $(x+a)^5$.

Ejemplo 2 Calcula: $(x+a)^5 =$

- Empezamos calculando primero los valores de los coeficientes, de acuerdo a la definición de combinaciones:
- Enseguida está el cálculo del primer coeficiente, que ya sabemos, es igual a 1:

$$\binom{5}{0} = \frac{5!}{0!(5-0)!} = \frac{5!}{5!} = 1$$

- El siguiente es el segundo coeficiente:

$$\binom{5}{1} = \frac{5!}{1!(5-1)!} = \frac{5!}{4!} = \frac{5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 5$$

- El siguiente es el tercer coeficiente:

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{2\cdot \cancel{3!}} = 10$$

- El siguiente es el cuarto coeficiente:

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot 2} = 10$$

- El siguiente es el quinto coeficiente:

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{5!}{4!} = \frac{5\cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 5$$

- Y finalmente, el sexto coeficiente:

$$\binom{5}{5} = \frac{5!}{5!(5-5)!} = \frac{5!}{5!} = 1$$

- Ahora que tenemos los coeficientes, procedemos como lo hicimos con el triángulo de Pascal, con lo que de nuevo obtendremos:

$$\begin{aligned}(x+a)^5 &= 1x^5 + 5x^4a^1 + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5x^1a^4 + 1a^5 \\ &= x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5\end{aligned}$$

2.2.5 Factorización

La factorización es la otra parte de la historia de los productos notables.

Esto es, ambas cosas se refieren a las mismas fórmulas, pero en los productos notables se nos daba una operación que debíamos realizar y encontrar el resultado.

Ahora, en la factorización se nos entrega el resultado y debemos encontrar cuál era la operación que se realizó, es decir, tenemos que expresarlo como si apenas se fuera a desarrollar el producto notable.

Factorización

Las reglas básicas para factorizar son:

i. *Ley distributiva o factor común* $ab + ac = a(b+c)$

ii. *Trinomio cuadrado perfecto* $x^2 \pm 2ax + a^2 = (x \pm a)^2$

iii. *Trinomio cuadrado no perfecto* $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$

iv. *Diferencia de cuadrados* $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$

v. *Suma o diferencia de dos cubos* $x^3 \pm a^3 = (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2)$

Definición 1

El hecho de reconocer cada uno de los casos de factorización nos ayudará a simplificar expresiones a lo largo de todos los cursos de matemáticas que vienen más adelante.

En realidad, puedes ver que para cada caso de factorización hay un caso correspondiente en los productos notables, de manera que con que memorices una fórmula, es suficiente para ambos temas.

Factoriza:

$$2x^2 + 5x$$

Ejemplo 1

- En este caso debemos utilizar la ley distributiva.
- Para esto identificamos el factor que se repite en todos los términos y lo escribimos a la izquierda.
- Luego escribimos dentro de un paréntesis todos los términos que no se repiten...
- Aquí se repite la x:

$$2x^2 + 5x = x(2x+5)$$

- De manea que si multiplicamos obtenemos de nuevo: $2x^2 + 5x$.

En este primer ejemplo solamente teníamos un factor común. En algunos otros casos tendremos dos o más, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2

Factoriza:

$$12x^3 + 8x^2 - 20x$$

- Lo primero que debemos observar es que todos los coeficientes de los términos del trinomio se pueden dividir exactamente entre 4.
- Esto nos sugiere que factoricemos al número 4.
- Pero también podemos factorizar la literal x, porque aparece en todos los términos.
- Entonces, aplicando la ley distributiva obtenemos:

$$12x^3 + 8x^2 - 20x = 4x\left(3x^2 + 2x - 5\right)$$

- Para verificar que el resultado es correcto, puedes multiplicar y debes obtener el trinomio de la izquierda de la igualdad.

Ejemplo 3

Factoriza:

$$3x^3 + 21x^4b + 18x^5 - 9x^6$$

- En este ejemplo tenemos que todos los coeficientes son divisibles por 3.
- Así que vamos a factorizar a este número.
- Además, podemos factorizar, no solamente al número x, sino a x^3:

$$3x^3 + 21x^4b + 18x^5 - 9x^6 = 3x^3 \cdot \left(1 + 7xb + 6x^2 - 3x^3\right)$$

- Puedes verificar que la factorización es correcta realizando la multiplicación que queda indicada.

El primer paso que debes realizar cuando vas a factorizar una expresión es verificar si puedes aplicar la ley distributiva.

Ejemplo 4

Factoriza

$$x^2 + 12x + 36$$

- En este caso vamos a ver si se trata de un trinomio cuadrado perfecto...
- Para eso, primero sacamos la mitad del coeficiente del término que contiene x, también conocido como el término lineal.
- La mitad de 12 es: 6
- Ahora calculamos el cuadrado de este número: $6^2 = 36$.

- Como este resultado coincide con el término independiente (el que no contiene a x) del trinomio que nos dieron, sí se trata de un trinomio cuadrado perfecto.
- Entonces,
$$x^2 + 12x + 36 = (x+6)^2$$
- Para verificar que el resultado es correcto, podemos desarrollar el binomio al cuadrado.

Factoriza:
$$m^4 - 6m^2 + 9$$
Ejemplo 5

- En este caso no tenemos un polinomio cuadrático, sino de grado cuatro.
- Sin embargo, podemos transformarlo a un trinomio cuadrado si utilizamos la siguiente sustitución: $x = m^2$.
- Porque al aplicar las leyes de los exponentes obtenemos: $x^2 = m^4$, y al sustituir en el trinomio que nos dieron nos queda:
$$m^4 - 6m^2 + 9 = x^2 - 6x + 9$$
- Ahora sí, tenemos un trinomio cuadrado.
- Vamos a ver si es un trinomio cuadrado perfecto: para eso sacamos la mitad del coeficiente del término lineal ($-6/2 = -3$) y lo elevamos al cuadrado (9).
- Como obtuvimos 9, y este es el valor del término independiente, sí se trata de un trinomio cuadrado perfecto.
- Entonces, se trata del caso (*ii*) de factorización:
$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$$
- Pero nuestro ejercicio no incluía a la literal x. Nosotros decidimos incluirla para simplificar el problema.
- Así que lo único que falta es hacer la sustitución: $x = m^2$,
$$m^4 - 6m^2 + 9 = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = \left(m^2 - 3\right)^2$$
- El resultado es: $m^4 - 6m^2 + 9 = \left(m^2 - 3\right)^2$

Observa que en el ejemplo anterior todas las literales tenían exponente par. Por eso es fácil hacer la transformación del polinomio de grado cuatro a uno de grado dos.

No siempre vamos a tener coeficiente igual a uno en el término cuadrático. El siguiente ejemplo muestra uno de esos casos:

Factoriza:
$$4x^2 - 20x + 25$$
Ejemplo 6

- En este caso es más sencillo empezar calculando la raíz cuadrada de los términos cuadrático e independiente:

$$\sqrt{4x^2} = 2x \qquad \text{y} \qquad \sqrt{25} = 5$$

- Nosotros sabemos por el producto notable de elevar un binomio al cuadrado que:

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

- Entonces, el coeficiente del término lineal es igual al doble del producto de los términos independiente y cuadrático.
- Podemos comparar este producto con el término lineal del polinomio que nos dieron a factorizar:

$$-2 \cdot (2x) \cdot (5) = -20x$$

- Como coinciden, se trata de un trinomio cuadrado perfecto, y su factorización queda:

$$4x^2 - 20x + 25 = (2x-5)^2$$

- Debes tener cuidado, porque muchos estudiantes olvidan multiplicar por la raíz del coeficiente del término cuadrático (el 2 de $2x$) cuando están verificando que el término lineal sea $-2ax$.

Ya sabes que no todos los trinomios cuadrados son perfectos. Cuando tenemos un trinomio cuadrado es una buena idea empezar la factorización verificando si se trata o no de uno perfecto. Si no es un trinomio cuadrado perfecto, tenemos que usar otro truco.

Ejemplo 7

Factoriza

$$x^2 + 12x + 35$$

- En este caso, cuando saquemos la mitad de 12 y lo elevemos al cuadrado, no obtendremos 35.
- Esto nos indica que se trata de un trinomio cuadrado **no** perfecto.
- En este caso tenemos un producto de binomios con término común.
- Así que buscaremos dos números que sumados den 12 y multiplicados sean igual a 35.
- Para facilitarte el trabajo, empieza siempre buscando dos números que multiplicados sean el término independiente, en este caso, 35, porque hay menos soluciones que buscar dos números sumados dén 12.
- Esos números son 5 y 7. Con lo que obtenemos:

$$x^2 + 12x + 35 = (x+5)(x+7)$$

  lo cual podemos comprobar desarrollando el producto conjugado que quedó indicado.

Ejemplo 8

Factoriza:

$$x^2 - 4x - 21$$

- Es muy evidente que no se trata de un cuadrado perfecto por dos cosas:

i. El término independiente es negativo, y si fuera un cuadrado perfecto debería ser positivo.
ii. El cuadrado de -2 no es igual a -21.

- Entonces, debemos encontrar dos números que sumados den -4 y multiplicados den -21
- Observa que el coeficiente del término lineal es igual a -4.
- Ya sabemos que este coeficiente es igual a la suma de los números que buscamos, por lo que se deduce que el mayor de los dos números es negativo.
- Además, el término independiente es negativo, lo que nos indica que los números que buscamos tienen signos contrarios, porque menos por menos es más.
- Empezamos buscando números que multiplicados den 21.
- Solamente tenemos dos pares de candidatos: (1,21) y (3,7).
- Sabemos que el mayor de los dos será negativo y el otro positivo.
- La solución es $3, -7$, porque

$$\begin{aligned} 3+(-7) &= -4 \qquad \text{y} \\ (3)(-7) &= -21 \end{aligned}$$

- Entonces, la factorización que buscábamos es:

$$x^2 - 4x - 21 = (x+3)(x-7)$$

Factoriza:

$$4x^2 + 10x + 4$$

Ejemplo 9

- Observa que el coeficiente del término cuadrático es diferente de uno.
- En este caso debemos primero calcular la raíz cuadrada del término cuadrático:

$$\sqrt{4x^2} = 2x$$

- Ahora vamos a escribir la factorización que deseamos encontrar:

$$(2x+m)(2x+n)$$

- Si multiplicamos obtenemos:

$$(2x+m)(2x+n) = 4x^2 + 2x(m+n) + m\cdot n$$

- Entonces necesitamos encontrar dos números m, n que satisfagan las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} 2(m+n) &= 10, \text{ y} \\ m\cdot n &= 4 \end{aligned}$$

- La primera condición implica que $m+n=5$.
- La segunda condición nos limita a usar solamente alguno de los siguienes casos: $(2,2)$ ó $(1,4)$.

- Porque $2 \times 2 = 4$ y $1 \times 4 = 4$
- La solución que satisface las condiciones del problema es: $(1, 4)$, porque $1 + 4 = 5$.
- Entonces, la factorización que buscamos es:

$$4x^2 + 10x + 4 = (2x + 1)(2x + 4)$$

Ahora estudiaremos otro caso de factorización: la diferencia de cuadrados, que al factorizarse se convierte en un producto conjugado.

Ejemplo 10

Factoriza:

$$x^2 - 81$$

- Este caso de la factorización es el más sencillo, porque la fórmula nos dice:

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

- Observa que basta encontrar la raíz cuadrada de cada uno de los términos de la diferencia de cuadrados y escribir, a partir de estas raíces, el producto conjugado.
- En nuestro ejemplo, tenemos:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2} &= x \\ \sqrt{81} &= 9 \end{aligned}$$

- Entonces, la factorización queda:

$$x^2 - 81 = (x + 9)(x - 9)$$

Una forma más de justificar el mismo resultado puede hacerse con el caso (*iii*) de factorización.

Para esto buscamos dos números que sumados den cero (el coeficiente del término lineal) y multiplicados den -81.

Es obvio que para la suma sea cero, los números deben ser iguales y con signo opuesto. Para que su producto sea -81, necesitamos que los números sean $\sqrt{81}$ y $-\sqrt{81}$, que son precisamente 9 y -9.

Como puedes ver, si suponemos que se trata de un producto de binomios con término común, de cualquier forma debes llegar al resultado correcto.

Ejemplo 11

Factoriza:

$$16x^4 - 36y^{10}$$

- Este caso de factorización es muy sencillo.
- Simplemente debemos calcular la raíz cuadrada de cada uno de los términos y utilizarlos para escribir un producto conjugado:

$$\begin{aligned} \sqrt{16x^4} &= 4x^2 \\ \sqrt{36y^{10}} &= 6y^5 \end{aligned}$$

- Al escribir el producto conjugado obtenemos la factorización:

$$16x^4 - 36y^{10} = (4x^2 + 6y^5)(4x^2 - 6y^5)$$

- Puedes verificar que el resultado es correcto realizando la multiplicación.

Observa que pudimos haber transformado la diferencia de cuadrados con las siguientes sustituciones: $m = 4x^2$, $n = 6y^5$, y obtener:

$$16x^4 - 36y^{10} = m^2 - n^2$$

Al factorizar obtenemos:

$$m^2 - n^2 = (m+n)(m-n)$$

y al sustituir los valores definidos de m y n nos da:

$$16x^4 - 36y^{10} = m^2 - n^2 = (m+n)(m-n) = (4x^2 + 6y^5)(4x^2 - 6y^5)$$

Esto muestra que estamos utilizando el producto notable, pero para un caso más general.

Factoriza:

$$\frac{25x^6}{81} - \frac{9}{m^4}$$

Ejemplo 12

- En este caso tenemos una diferencia de cuadrados, porque:

$$\left(\frac{5x^3}{9}\right)^2 = \frac{25x^6}{81}$$

  y

$$\left(\frac{3}{m^2}\right)^2 = \frac{9}{m^4}$$

- Entonces, de acuerdo con la fórmula, tenemos:

$$\frac{25x^6}{81} - \frac{9}{m^4} = \left(\frac{5x^3}{9} + \frac{3}{m^2}\right)\left(\frac{5x^3}{9} - \frac{3}{m^2}\right)$$

Factoriza:

$$8x^3 - 27y^{12}$$

Ejemplo 13

- Aquí tenemos el caso más laborioso, pero igual de sencillo: se trata de una diferencia de cubos.
- Primero sacamos la raíz cúbica de cada término:

$$\sqrt[3]{8x^3} = 2x \qquad \text{porque} \qquad (2x)^3 = 8x^3$$

  y

$$\sqrt[3]{27y^{12}} = 3y^4 \qquad \text{porque} \qquad \left(3y^4\right)^3 = 27y^{12}$$

- Ahora sustituimos de acuerdo a la fórmula:

$$\begin{aligned} x^3 - a^3 &= (x-a)(x^2 + a\,x + a^2) \\ 8\,x^3 - 27\,y^{12} &= (2\,x)^3 - \left(3\,y^4\right)^3 \\ (2\,x)^3 - \left(3\,y^4\right)^3 &= \left(2\,x - 3\,y^4\right)\left((2\,x)^2 + \left(3\,y^4\right)(2\,x) + \left(3\,y^4\right)^2\right) \\ &= \left(2\,x - 3\,y^4\right)\left(4\,x^2 + 6\,x\,y^4 + 9\,y^8\right) \end{aligned}$$

- En conclusión:

$$8\,x^3 - 27\,y^{12} = \left(2\,x - 3\,y^4\right)\left(4\,x^2 + 6\,x\,y^4 + 9\,y^8\right)$$

Para que puedas identificar rápidamente qué caso de factorización debes utilizar trata de ver qué estructura tiene el polinomio que deseas factorizar.

Utiliza los procedimientos que se explican en los ejemplos, dependiendo de la estructura de cada polinomio.

No todos los polinomios se pueden factorizar. Por ejemplo, x^2+1 no se puede factorizar, a pesar de que parece sencillo.

Cuando un polinomio no se pueda factorizar, es decir, no se pueda expresar como el producto de otros polinomios lineales (de grado 1) o cuadráticos (de grado 2), diremos que es un polinomio primo.

En caso de que sí sea posible factorizarlo, diremos que ese polinomio es compuesto.

En la lista de ejercicios se incluyen solamente polinomios compuestos para que practiques la factorización y adquieras destreza en este procedimiento tan importante en matemáticas.

Ejercicios 2.2.5 Factoriza cada una de las siguientes expresiones.

1) $64 + 48\,v + 9\,v^2 =$ **R.** $(8+3\,v)^2$

2) $81 + 108\,v + 36\,v^2 =$ **R.** $(9+6\,v)^2$

3) $81 + 126\,v + 49\,v^2 =$ **R.** $(9+7\,v)^2$

4) $1 + 12\,v + 36\,v^2 =$ **R.** $(1+6\,v)^2$

5) $81 + 18\,v + v^2 =$ **R.** $(9+v)^2$

6) $81 + 90\,v + 25\,v^2 =$ **R.** $(9+5\,v)^2$

7) $81 - 90\,v + 25\,v^2 =$ **R.** $(9-5\,v)^2$

8) $64 + 64\,v + 16\,v^2 =$ **R.** $(8+4\,v)^2$

9) $4 + 20\,v + 25\,v^2 =$ **R.** $(2+5\,v)^2$

10) $49 + 126\,v + 81\,v^2 =$ **R.** $(7+9\,v)^2$

11) $25 - 10\,v + v^2 =$ **R.** $(5-v)^2$

12) $49 + 56\,v + 16\,v^2 =$ **R.** $(7+4\,v)^2$

13) $64 - 80\,v + 25\,v^2 =$ **R.** $(8-5\,v)^2$

14) $1 - 14\,v + 49\,v^2 =$ **R.** $(1-7\,v)^2$

15) $1+18\,v+81\,v^2=$ **R.** $(1+9\,v)^2$

16) $25-40\,v+16\,v^2=$ **R.** $(5-4\,v)^2$

17) $1+8\,v+16\,v^2=$ **R.** $(1+4\,v)^2$

18) $16+24\,v+9\,v^2=$ **R.** $(4+3\,v)^2$

19) $4-16\,v+16\,v^2=$ **R.** $(2-4\,v)^2$

20) $9-42\,v+49\,v^2=$ **R.** $(3-7\,v)^2$

21) $49+14\,v+v^2=$ **R.** $(7+v)^2$

22) $36+60\,v+25\,v^2=$ **R.** $(6+5\,v)^2$

23) $81-36\,v+4\,v^2=$ **R.** $(9-2\,v)^2$

24) $36-36\,v+9\,v^2=$ **R.** $(6-3\,v)^2$

25) $9-42\,v+49\,v^2=$ **R.** $(3-7\,v)^2$

26) $64+32\,v+4\,v^2=$ **R.** $(8+2\,v)^2$

27) $1+2\,v+v^2=$ **R.** $(1+v)^2$

28) $36-12\,v+v^2=$ **R.** $(6-v)^2$

29) $49+126\,v+81\,v^2=$ **R.** $(7+9\,v)^2$

30) $25-20\,v+4\,v^2=$ **R.** $(5-2\,v)^2$

31) $16+56\,v+49\,v^2=$ **R.** $(4+7\,v)^2$

32) $49-42\,v+9\,v^2=$ **R.** $(7-3\,v)^2$

33) $9-30\,v+25\,v^2=$ **R.** $(3-5\,v)^2$

34) $-20+14\,x+24\,x^2=$ **R.** $(4+6\,x)(-5+4\,x)$

35) $45+4\,x+x^2=$ **R.** $(5+x)(9+x)$

36) $-14+47\,x+30\,x^2=$ **R.** $(7+6\,x)(-2+5\,x)$

37) $-1+17\,x+72\,x^2=$ **R.** $(1+8\,x)(-1+9\,x)$

38) $-21+19\,x+4\,x^2=$ **R.** $(3+x)(-7+4\,x)$

39) $16+42\,x+18\,x^2=$ **R.** $(8+3\,x)(2+6\,x)$

40) $16+68\,x+42\,x^2=$ **R.** $(8+6\,x)(2+7\,x)$

41) $9+34\,x+8\,x^2=$ **R.** $(9+2\,x)(1+4\,x)$

42) $15+5\,x+20\,x^2=$ **R.** $(5+5\,x)(3+4\,x)$

43) $-72+3\,x+9\,x^2=$ **R.** $(9+3\,x)(-8+3\,x)$

44) $-6+9\,x+6\,x^2=$ **R.** $(2+x)(-3+6\,x)$

45) $5+8\,x-21\,x^2=$ **R.** $(5-7\,x)(1+3\,x)$

46) $56-12\,x-20\,x^2=$ **R.** $(7-5\,x)(8+4\,x)$

47) $12-24x-36x^2=$ **R.** $(3-9x)(4+4x)$

48) $-3+15x-18x^2=$ **R.** $(1-3x)(-3+6x)$

49) $8-50x-42x^2=$ **R.** $(1-7x)(8+6x)$

50) $72+61x+10x^2=$ **R.** $(9+2x)(8+5x)$

51) $-8+28x-20x^2=$ **R.** $(4-4x)(-2+5x)$

52) $4+12x-7x^2=$ **R.** $(2-x)(2+7x)$

53) $-2+22x-48x^2=$ **R.** $(1-8x)(-2+6x)$

54) $24+78x+54x^2=$ **R.** $(6+6x)(4+9x)$

55) $2+4x+2x^2=$ **R.** $(1+x)(2+2x)$

56) $6-8x-8x^2=$ **R.** $(1-2x)(6+4x)$

57) $8+37x-15x^2=$ **R.** $(8-3x)(1+5x)$

58) $-25+65x-36x^2=$ **R.** $(5-4x)(-5+9x)$

59) $20+13x-15x^2=$ **R.** $(5-3x)(4+5x)$

60) $-20+26x+18x^2=$ **R.** $(4+2x)(-5+9x)$

61) $7+21x+14x^2=$ **R.** $(1+2x)(7+7x)$

62) $-7+25x-12x^2=$ **R.** $(7-4x)(-1+3x)$

63) $3+19x-72x^2=$ **R.** $(3-8x)(1+9x)$

64) $40-57x-27x^2=$ **R.** $(5-9x)(8+3x)$

65) $-4-2x+56x^2=$ **R.** $(2+8x)(-2+7x)$

66) $24+6x-18x^2=$ **R.** $(8-6x)(3+3x)$

67) $-9+39x-36x^2=$ **R.** $(3-4x)(-3+9x)$

68) $36x^2-9y^4=$ **R.** $(6x+3y^2)(6x-3y^2)$

69) $x^2-9y^4=$ **R.** $(x+3y^2)(x-3y^2)$

70) $x^2-64y^4=$ **R.** $(x+8y^2)(x+8y^2)$

71) $64x^2-81y^4=$ **R.** $(8x+9y^2)(8x-9y^2)$

72) $8x^2-4y^4=$ **R.** $(9x+2y^2)(9x-2y^2)$

73) $25x^2-16y^4=$ **R.** $(5x+4y^2)(5x+4y^2)$

74) $64x^2-81y^4=$ **R.** $(8x+9y^2)(8x+9y^2)$

75) $49x^2-y^4=$ **R.** $(7x+y^2)(7x-y^2)$

76) $4x^2-49y^4=$ **R.** $(2x+7y^2)(2x-7y^2)$

77) $4x^2-25y^4=$ **R.** $(2x+5y^2)(2x-5y^2)$

78) $16x^2-25y^4=$ **R.** $(4x-5y^2)(4x+5y^2)$

79) $25x^2 - 9y^4 =$ **R.** $(5x+3y^2)(5x-3y^2)$

80) $x^2 - 64y^4 =$ **R.** $(x+8y^2)(x-8y^2)$

81) $81x^2 - y^4 =$ **R.** $(9x-y^2)(9x+y^2)$

82) $9x^2 - 4y^4 =$ **R.** $(3x-2y^2)(3x+2y^2)$

83) $81x^2 - 49y^4 =$ **R.** $(9x-7y^2)(9x+7y^2)$

84) $4x^2 - 81y^4 =$ **R.** $(2x-9y^2)(2x+9y^2)$

85) $25x^2 - 64y^4 =$ **R.** $(5x-8y^2)(5x+8y^2)$

86) $16x^2 - 36y^4 =$ **R.** $(4x+6y^2)(4x-6y^2)$

87) $4x^2 - 81y^4 =$ **R.** $(2x+9y^2)(2x-9y^2)$

88) $25x^2 - 64y^4 =$ **R.** $(5x-8y^2)(5x+8y^2)$

89) $49x^2 - 25y^4 =$ **R.** $(7x-5y^2)(7x+5y^2)$

90) $9x^2 - 64y^4 =$ **R.** $(3x-8y^2)(3x+8y^2)$

91) $64x^2 - 81y^4 =$ **R.** $(8x-9y^2)(8x+9y^2)$

92) $36x^2 - 9y^4 =$ **R.** $(6x+3y^2)(6x-3y^2)$

93) $x^2 - 36y^4 =$ **R.** $(x-6y^2)(x+6y^2)$

94) $4x^2 - 16y^4 =$ **R.** $(2x-4y^2)(2x+4y^2)$

95) $9x^2 - 9y^4 =$ **R.** $(3x+3y^2)(3x-3y^2)$

96) $81x^2 - 64y^4 =$ **R.** $(9x-8y^2)(9x+8y^2)$

97) $9x^2 - y^4 =$ **R.** $(3x-y^2)(3x+y^2)$

98) $x^2 - 16y^4 =$ **R.** $(x+4y^2)(x-4y^2)$

99) $25x^2 - 81y^4 =$ **R.** $(5x+9y^2)(5x-9y^2)$

100) $36x^2 - y^4 =$ **R.** $(6x+y^2)(6x-y^2)$

101) $8x^3 + 24x^2y + 24xy^2 + 8y^3 =$ **R.** $(2x+2y)^3$

102) $27x^3 + 108x^2y + 144xy^2 + 64y^3 =$ **R.** $(3x+4y)^3$

103) $512x^3 + 576x^2y + 216xy^2 + 27y^3 =$ **R.** $(8x+3y)^3$

104) $8x^3 + 108x^2y + 486xy^2 + 729y^3 =$ **R.** $(2x+9y)^3$

105) $x^3 + 27x^2y + 243xy^2 + 729y^3 =$ **R.** $(x+9y)^3$

106) $64x^3 + 240x^2y + 300xy^2 + 125y^3 =$ **R.** $(4x+5y)^3$

107) $125x^3 + 300x^2y + 240xy^2 + 64y^3 =$ **R.** $(5x+4y)^3$

108) $x^3 + 15x^2y + 75xy^2 + 125y^3 =$ **R.** $(x+5y)^3$

109) $27x^3 + 216x^2y + 576xy^2 + 512y^3 =$ **R.** $(3x+8y)^3$

110) $x^3 + 12x^2y + 48xy^2 + 64y^3 =$ **R.** $(x+4y)^3$

2.2.6 Simplificación de Fracciones algebraicas

Así como los polinomios son una generalización de los números enteros, las fracciones algebraicas son una generalización de las fracciones. La única diferencia que veremos es que ahora en el numerador y/o en el denominador veremos polinomios.

Seguramente recuerdas realizar las operaciones con fracciones. Pues con esos mismos procedimientos realizaremos las operaciones con fraciones algebraicas.

Ejemplo 1 Simplifica: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} =$

- Aquí vamos a suponer que x y y son números... De hecho, eso representan...
- Así que vamos a utilizar el procedimiento para sumar fracciones:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y+x}{x\,y}$$

- Observa que en realidad primero encontramos fracciones equivalentes a cada una de las fracciones algebraicas que se están sumando, porque:

$$\frac{1}{x} = \frac{y}{x\,y} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{y} = \frac{x}{x\,y}$$

- Así que sumar:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

- Es lo mismo que sumar:

$$\frac{y}{x\,y} + \frac{x}{x\,y} = \frac{y+x}{x\,y}$$

  porque ahora tenemos denominador común.

Ejemplo 2 Simplifica:

$$\frac{3}{x-y} + \frac{2}{x+y} =$$

- Empezamos encontrando el mínimo común denominador, que es en sí el mínimo común múltiplo de los denominadores.
- En este caso, es igual al producto de los denominadores:

$$\frac{3}{x-y} + \frac{2}{x+y} = \frac{\qquad}{(x-y)(x+y)}$$

- Ahora vamos a realizar el mismo procedimiento que con las fracciones que tienen números en lugar de literales,
- es decir, vamos a *multiplicar cruzado*:

$$\frac{3}{x-y} + \frac{2}{x+y} = \frac{3(x+y)+2(x-y)}{(x-y)(x+y)}$$

- Ahora realizamos las operaciones y simplificamos hasta donde sea posible.

$$\begin{aligned}\frac{3(x+y)+2(x-y)}{(x-y)(x+y)} &= \frac{3x+3y+2x-2y}{(x-y)(x+y)}\\ &= \frac{5x+y}{(x-y)(x+y)}\end{aligned}$$

- Entonces,

$$\frac{3}{x-y}+\frac{2}{x+y}=\frac{5x+y}{(x-y)(x+y)}$$

Algunas de las fracciones que vamos a simplificar se verán muy difíciles, pero en realidad, lo que tenemos que hacer es aplicar los procedimientos que normalmente usamos con las fracciones (con números en el numerador y en el denominador), realizar las operaciones que queden indicadas y terminamos.

Simplifica:

$$\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}=$$

Ejemplo 3

- En este caso tenemos que utilizar el mismo procedimiento...
- Primero encontramos en mínimo común denominador:

$$\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}=\frac{\quad}{x^2y^2}$$

- Ahora realizamos el *producto cruzado*:

$$\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}=\frac{x^3-y^3}{x^2y^2}$$

- Esto significa que:

$$\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}=\frac{x^3-y^3}{x^2y^2}$$

Algunas veces nos servirá factorizar para simplificar los resultados o las fracciones antes de empezar con las operaciones.

Simplifica:

$$\frac{x^2-3x-10}{x^2+2x-3}\cdot\frac{x^2+7x+12}{x^2+6x+8}=$$

Ejemplo 4

- Primero factorizamos todos los polinomios que se encuentras en los numeradores y denominadores de las fracciones:

$$\begin{aligned}x^2-3x-10 &= (x+2)(x-5)\\ x^2+2x-3 &= (x+3)(x-1)\\ x^2+7x+12 &= (x+3)(x+4)\\ x^2+6x+8 &= (x+4)(x+2)\end{aligned}$$

- Entonces, podemos escribir la operación de la siguiente manera equivalente:

$$\frac{x^2-3x-10}{x^2+2x-3}\cdot\frac{x^2+7x+12}{x^2+6x+8}=\frac{(x+2)(x-5)}{(x+3)(x-1)}\cdot\frac{(x+3)(x+4)}{(x+4)(x+2)}$$

- Ahora realizamos la multiplicación como se hace con las fracciones con números: multiplicamos numerador por numerador y denominador por denominador:

$$\begin{aligned}\frac{x^2-3x-10}{x^2+2x-3}\cdot\frac{x^2+7x+12}{x^2+6x+8} &= \frac{(x+2)(x-5)}{(x+3)(x-1)}\cdot\frac{(x+3)(x+4)}{(x+4)(x+2)}\\ &= \frac{\cancel{(x+2)}(x-5)\cancel{(x+3)}\cancel{(x+4)}}{\cancel{(x+3)}(x-1)\cancel{(x+4)}\cancel{(x+2)}}\\ &= \frac{x-5}{x-1}\end{aligned}$$

La división también se realiza exactamente de la misma manera que con los números: *multiplicamos cruzado*...

Ejemplo 5

Simplifica:

$$\frac{x^2+2x-35}{x^2+11x+18}\div\frac{x^2-4x-5}{x^2+10x+9}$$

- Empezamos factorizando los polinomios:

$$\begin{aligned}x^2+2x-35 &= (x+7)(x-5)\\ x^2+11x+18 &= (x+2)(x+9)\\ x^2-4x-5 &= (x-5)(x+1)\\ x^2+10x+9 &= (x+9)(x+1)\end{aligned}$$

- Ahora podemos expresar la operación y simplificar el divisor:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2x-35}{x^2+11x+18}\div\frac{x^2-4x-5}{x^2+10x+9} &= \frac{(x+7)(x-5)}{(x+2)(x+9)}\div\frac{(x-5)\cancel{(x+1)}}{(x+9)\cancel{(x+1)}}\\ &= \frac{(x+7)(x-5)}{(x+2)(x+9)}\div\frac{x-5}{x+9}\end{aligned}$$

  lo cual simplifica nuestra operación.

- Ahora realizamos la división:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2x-35}{x^2+11x+18}\div\frac{x^2-4x-5}{x^2+10x+9} &= \frac{(x+7)(x-5)}{(x+2)(x+9)}\div\frac{x-5}{x+9}\\ &= \frac{(x+7)\cancel{(x-5)}\cancel{(x+9)}}{(x+2)\cancel{(x+9)}\cancel{(x-5)}}\\ &= \frac{x+7}{x+2}\end{aligned}$$

- Entonces,

$$\frac{x^2+2x-35}{x^2+11x+18}\div\frac{x^2-4x-5}{x^2+10x+9}=\frac{x+7}{x+2}$$

Si no recuerdas cómo realizar una operación con fracciones algebraicas, basta recordar cómo realizas las operaciones con las fracciones que tienen números en el numerador y en el denominador. Debes usar exactamente el mismo procedimiento, porque los polinomios representan números, y las fracciones algebraicas se forman a partir de polinomios.

Realiza las operaciones que están indicadas y simplifica el resultado hasta su mínima expresión.

Ejercicios 2.2.6

1) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-9}$ **R.** $\dfrac{-11+3x}{(x-1)(x-9)}$

2) $\dfrac{6}{x-5}+\dfrac{5}{x+5}$ **R.** $\dfrac{5+11x}{(x-5)(x+5)}$

3) $\dfrac{1}{x+6}+\dfrac{2}{x+3}$ **R.** $\dfrac{15+3x}{(x+6)(x+3)}$

4) $\dfrac{4}{x+9}+\dfrac{1}{x-6}$ **R.** $\dfrac{-15+5x}{(x+9)(x-6)}$

5) $\dfrac{6}{x+1}+\dfrac{2}{x-9}$ **R.** $\dfrac{-52+8x}{(x+1)(x-9)}$

6) $\dfrac{8}{x+2}+\dfrac{4}{x+2}$ **R.** $\dfrac{24+12x}{(x+2)(x+2)}$

7) $\dfrac{7}{x+8}+\dfrac{4}{x+6}$ **R.** $\dfrac{74+11x}{(x+8)(x+6)}$

8) $\dfrac{1}{x-6}+\dfrac{9}{x-2}$ **R.** $\dfrac{-56+10x}{(x-6)(x-2)}$

9) $\dfrac{7}{x-3}+\dfrac{7}{x+6}$ **R.** $\dfrac{21+14x}{(x-3)(x+6)}$

10) $\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{5}{x-4}$ **R.** $\dfrac{2+7x}{(x+2)(x-4)}$

11) $\dfrac{3}{x+9}+\dfrac{6}{x+4}$ **R.** $\dfrac{66+9x}{(x+9)(x+4)}$

12) $\dfrac{5}{x+1}+\dfrac{8}{x-3}$ **R.** $\dfrac{-7+13x}{(x+1)(x-3)}$

13) $\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{9}{x-1}$ **R.** $\dfrac{14+13x}{(x+2)(x-1)}$

14) $\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{6}{x+1}$ **R.** $\dfrac{-9+9x}{(x-2)(x+1)}$

15) $\dfrac{7}{x+3}+\dfrac{2}{x-6}$ **R.** $\dfrac{-36+9x}{(x+3)(x-6)}$

16) $\dfrac{3-6x}{9x+2}+\dfrac{9-x}{5x+5}$ **R.** $\dfrac{-39x^2+64x+33}{(9x+2)(5x+5)}$

17) $\dfrac{6+8x}{9x-9}+\dfrac{1+2x}{3x+4}$ **R.** $\dfrac{42x^2+41x+15}{(9x-9)(3x+4)}$

18) $\dfrac{4-2x}{x-5}+\dfrac{7+3x}{x-6}$ **R.** $\dfrac{x^2+8x-59}{(x-5)(x-6)}$

19) $\dfrac{3+6x}{6x-4}+\dfrac{5+4x}{5x+5}$ **R.** $\dfrac{54x^2+59x-5}{(6x-4)(5x+5)}$

20) $\dfrac{6+6x}{2x-6}+\dfrac{9-4x}{x+1}$ **R.** $\dfrac{-2x^2+54x-48}{(2x-6)(x+1)}$

21) $\dfrac{8+4x}{7x-9}+\dfrac{4-9x}{6x+1}$ **R.** $\dfrac{-39x^2+161x-28}{(7x-9)(6x+1)}$

22) $\dfrac{9-5x}{8x-7}+\dfrac{3+4x}{9x-4}$ **R.** $\dfrac{-13x^2+97x-57}{(8x-7)(9x-4)}$

23) $\dfrac{4+9x}{x-8}+\dfrac{5-8x}{2x+1}$ **R.** $\dfrac{10x^2+86x-36}{(x-8)(2x+1)}$

24) $\dfrac{9+x}{x+3}+\dfrac{1-8x}{7x-4}$ **R.** $\dfrac{-x^2+36x-33}{(x+3)(7x-4)}$

25) $\dfrac{3+4x}{x+7}+\dfrac{9-5x}{3x-8}$ **R.** $\dfrac{7x^2-49x+39}{(x+7)(3x-8)}$

26) $\dfrac{1+3x}{3x-5}+\dfrac{9+7x}{8x-1}$ **R.** $\dfrac{45x^2-3x-46}{(3x-5)(8x-1)}$

27) $\dfrac{5+7x}{x-3}+\dfrac{5+8x}{5x+9}$ **R.** $\dfrac{43x^2+69x+30}{(x-3)(5x+9)}$

28) $\dfrac{8-6x}{3x+1}+\dfrac{9+4x}{2x-6}$ **R.** $\dfrac{0x^2+83x-39}{(3x+1)(2x-6)}$

29) $\dfrac{2-4x}{2x+9}+\dfrac{2-4x}{7x-3}$ **R.** $\dfrac{-36x^2-6x+12}{(2x+9)(7x-3)}$

30) $\dfrac{9+7x}{4x-4}+\dfrac{3-6x}{3x-2}$ **R.** $\dfrac{-3x^2+49x-30}{(4x-4)(3x-2)}$

31) $\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{5}{x+8}$ **R.** $\dfrac{42-x}{(x-2)(x+8)}$

32) $\dfrac{5}{x+1}-\dfrac{1}{x-4}$ **R.** $\dfrac{-21+4x}{(x+1)(x-4)}$

33) $\dfrac{9}{x-4}-\dfrac{3}{x-6}$ **R.** $\dfrac{-42+6x}{(x-4)(x-6)}$

34) $\dfrac{7}{x+6}-\dfrac{7}{x-3}$ **R.** $\dfrac{-63}{(x+6)(x-3)}$

35) $\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{3}{x+5}$ **R.** $\dfrac{23+x}{(x-1)(x+5)}$

36) $\dfrac{6}{x+2}-\dfrac{1}{x+9}$ **R.** $\dfrac{52+5x}{(x+2)(x+9)}$

37) $\dfrac{3}{x-6}-\dfrac{3}{x+8}$ **R.** $\dfrac{42}{(x-6)(x+8)}$

38) $\dfrac{9}{x-5}-\dfrac{4}{x-4}$ **R.** $\dfrac{-16+5x}{(x-5)(x-4)}$

39) $\dfrac{3}{x-3}-\dfrac{6}{x-5}$ **R.** $\dfrac{3-3x}{(x-3)(x-5)}$

40) $\dfrac{8}{x+8}-\dfrac{6}{x+4}$ **R.** $\dfrac{-16+2x}{(x+8)(x+4)}$

41) $\dfrac{7}{x+7} - \dfrac{3}{x+3}$ **R.** $\dfrac{4x}{(x+7)(x+3)}$

42) $\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{7}{x-4}$ **R.** $\dfrac{-5-4x}{(x-1)(x-4)}$

43) $\dfrac{8}{x+9} - \dfrac{4}{x-6}$ **R.** $\dfrac{-84+4x}{(x+9)(x-6)}$

44) $\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{3}{x-7}$ **R.** $\dfrac{2-2x}{(x-3)(x-7)}$

45) $\dfrac{7}{x-6} - \dfrac{7}{x-2}$ **R.** $\dfrac{28}{(x-6)(x-2)}$

46) $\dfrac{3+7x}{x+3} - \dfrac{1+5x}{2x-1}$ **R.** $\dfrac{9x^2-17x-6}{(x+3)(2x-1)}$

47) $\dfrac{4-x}{5x+7} - \dfrac{2+9x}{9x+3}$ **R.** $\dfrac{-54x^2-40x-2}{(5x+7)(9x+3)}$

48) $\dfrac{1+5x}{6x+3} - \dfrac{7-4x}{4x+9}$ **R.** $\dfrac{44x^2+19x-12}{(6x+3)(4x+9)}$

49) $\dfrac{9+8x}{6x+9} - \dfrac{7+2x}{4x+9}$ **R.** $\dfrac{20x^2+48x+18}{(6x+9)(4x+9)}$

50) $\dfrac{2+8x}{x-5} - \dfrac{1+3x}{5x-1}$ **R.** $\dfrac{37x^2+16x+3}{(x-5)(5x-1)}$

51) $\dfrac{6-5x}{3x-5} - \dfrac{3+5x}{2x+5}$ **R.** $\dfrac{-25x^2+3x+45}{(3x-5)(2x+5)}$

52) $\dfrac{5-6x}{9x-1} - \dfrac{7-x}{4x+9}$ **R.** $\dfrac{-15x^2-98x+52}{(9x-1)(4x+9)}$

53) $\dfrac{3-3x}{9x-5} - \dfrac{9-4x}{5x+8}$ **R.** $\dfrac{21x^2-110x+69}{(9x-5)(5x+8)}$

54) $\dfrac{8+6x}{5x-5} - \dfrac{8-x}{9x+9}$ **R.** $\dfrac{59x^2+81x+112}{(5x-5)(9x+9)}$

55) $\dfrac{1+4x}{2x+6} - \dfrac{8-3x}{9x+1}$ **R.** $\dfrac{42x^2+15x-47}{(2x+6)(9x+1)}$

56) $\dfrac{6-x}{x-6} - \dfrac{5-2x}{5x-4}$ **R.** $\dfrac{-3x^2+17x+6}{(x-6)(5x-4)}$

57) $\dfrac{9-4x}{2x-2} - \dfrac{2+2x}{4x+9}$ **R.** $\dfrac{-20x^2+85}{(2x-2)(4x+9)}$

58) $\dfrac{5+4x}{3x+6} - \dfrac{7+7x}{8x-4}$ **R.** $\dfrac{11x^2-39x-62}{(3x+6)(8x-4)}$

59) $\dfrac{3-4x}{6x+4} - \dfrac{5+3x}{7x-8}$ **R.** $\dfrac{-46x^2+11x-44}{(6x+4)(7x-8)}$

60) $\dfrac{5-7x}{x-5} - \dfrac{5+7x}{2x-9}$ **R.** $\dfrac{-21x^2+103x-20}{(x-5)(2x-9)}$

61) $\left(\frac{x-9}{x-1}\right)\left(\frac{x-5}{x-8}\right)$ **R.** $\frac{x^2-14x+45}{x^2-9x+8}$

62) $\left(\frac{x+1}{x-3}\right)\left(\frac{x+9}{x-4}\right)$ **R.** $\frac{x^2+10x+9}{x^2-7x+12}$

63) $\left(\frac{x+3}{x-3}\right)\left(\frac{x-8}{x-5}\right)$ **R.** $\frac{x^2-5x-24}{x^2-8x+15}$

64) $\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\left(\frac{x+2}{x+9}\right)$ **R.** $\frac{x^2+x-2}{x^2+7x-18}$

65) $\left(\frac{x-6}{x-2}\right)\left(\frac{x+8}{x+1}\right)$ **R.** $\frac{x^2+2x-48}{x^2-x-2}$

66) $\left(\frac{x-8}{x+6}\right)\left(\frac{x-2}{x-3}\right)$ **R.** $\frac{x^2-10x+16}{x^2+3x-18}$

67) $\left(\frac{x-5}{x-3}\right)\left(\frac{x-9}{x+1}\right)$ **R.** $\frac{x^2-14x+45}{x^2-2x-3}$

68) $\left(\frac{x+8}{x-4}\right)\left(\frac{x-1}{x-9}\right)$ **R.** $\frac{x^2+7x-8}{x^2-13x+36}$

69) $\left(\frac{x+3}{x+9}\right)\left(\frac{x-6}{x-4}\right)$ **R.** $\frac{x^2-3x-18}{x^2+5x-36}$

70) $\left(\frac{x-7}{x+7}\right)\left(\frac{x+5}{x-3}\right)$ **R.** $\frac{x^2-2x-35}{x^2+4x-21}$

71) $\left(\frac{x-3}{x+9}\right)\left(\frac{x-4}{x+4}\right)$ **R.** $\frac{x^2-7x+12}{x^2+13x+36}$

72) $\left(\frac{x+1}{x+9}\right)\left(\frac{x+7}{x-9}\right)$ **R.** $\frac{x^2+8x+7}{x^2-81}$

73) $\left(\frac{x-6}{x-1}\right)\left(\frac{x+9}{x+2}\right)$ **R.** $\frac{x^2+3x-54}{x^2+x-2}$

74) $\left(\frac{x-9}{x-8}\right)\left(\frac{x-3}{x+8}\right)$ **R.** $\frac{x^2-12x+27}{x^2-64}$

75) $\left(\frac{x-6}{x+6}\right)\left(\frac{x+6}{x+7}\right)$ **R.** $\frac{x-6}{x+7}$

76) $\frac{x-2}{x+7}\div\frac{x+7}{x+9}$ **R.** $\frac{x^2+7x-18}{x^2+14x+49}$

77) $\frac{x-4}{x+8}\div\frac{x-4}{x-3}$ **R.** $\frac{x-3}{x+8}$

78) $\frac{x+4}{x+5}\div\frac{x+8}{x-2}$ **R.** $\frac{x^2+2x-8}{x^2+13x+40}$

79) $\frac{x+6}{x-2}\div\frac{x-8}{x+1}$ **R.** $\frac{x^2+7x+6}{x^2-10x+16}$

80) $\frac{x-2}{x+7}\div\frac{x+6}{x+8}$ **R.** $\frac{x^2+6x-16}{x^2+13x+42}$

81) $\dfrac{x+5}{x-9} \div \dfrac{x+1}{x-9}$ **R.** $\dfrac{x+5}{x+1}$

82) $\dfrac{x+2}{x-9} \div \dfrac{x+9}{x-7}$ **R.** $\dfrac{x^2-5x-14}{x^2-81}$

83) $\dfrac{x+7}{x-7} \div \dfrac{x-3}{x-8}$ **R.** $\dfrac{x^2-x-56}{x^2-10x+21}$

84) $\dfrac{x-2}{x+8} \div \dfrac{x+8}{x+9}$ **R.** $\dfrac{x^2+7x-18}{x^2+16x+64}$

85) $\dfrac{x+7}{x-7} \div \dfrac{x-4}{x+6}$ **R.** $\dfrac{x^2+13x+42}{x^2-11x+28}$

86) $\dfrac{x+6}{x+9} \div \dfrac{x-8}{x+5}$ **R.** $\dfrac{x^2+11x+30}{x^2+x-72}$

87) $\dfrac{x+7}{x-4} \div \dfrac{x+6}{x-1}$ **R.** $\dfrac{x^2+6x-7}{x^2+2x-24}$

88) $\dfrac{x-9}{x+3} \div \dfrac{x-4}{x-8}$ **R.** $\dfrac{x^2-17x+72}{x^2-x-12}$

89) $\dfrac{x-9}{x-2} \div \dfrac{x-2}{x-5}$ **R.** $\dfrac{x^2-14x+45}{x^2-4x+4}$

90) $\dfrac{x+5}{x-1} \div \dfrac{x+4}{x+3}$ **R.** $\dfrac{x^2+8x+15}{x^2+3x-4}$

91) **Reto: (Física)** Las unidades de la aceleración son: m/s^2. La definición de aceleración, matemáticamente está dada por la siguiente fórmula:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Sabiendo que las unidades de velocidad son m/s, justifica por qué aparecen en el denominador segundos al cuadrado.

92) **Reto: (Física)** En la sección **??** interpretamos la información que nos da la aceleración. ¿Sigue teniendo sentido las unidades que aparecen en el denominador de m/s^2? (Justifica tu respuesta)

Capítulo 3

Ecuaciones de primer grado

Por aprender...

Por qué es importante...

Las ecuaciones lineales nos ayudan a resolver problemas aplicados a diferentes contextos. Negocios, Química, Física, Administración, Computación, etc., frecuentemente requieren de la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

3.1 Ecuaciones de Primer Grado

Vamos a empezar el estudio de las ecuaciones de primer grado con el caso más sencillo.

Poco a poco iremos estudiando casos más complicados.

3.1.1 Ec. de Primer Grado con una incógnita

Una ecuación es una expresión matemática que iguala dos cantidades. Por ejemplo, $5+7=12$.

Empezamos la solución de ecuaciones con el siguiente juego.

Ejemplo 1

Pensé un número. Primero lo multipliqué por 7, al resultado le sumé 1 y finalmente obtuve 50. ¿Qué número pensé?

- No sabemos de inicio qué número pensó.
- Solamente sabemos que cuando multiplicó por 7, le sumó uno y obtuvo 50.
- Supongamos que pensó el número x.
- Cuando lo multiplicó por 7 obtuvo: $7x$
- Después, cuando sumó 1 con lo que tenía: $7x+1$
- Y este valor es igual a 50: $7x+1=50$.
- Antes de tener 50 tenía: $7x=50-1$, porque todavía no sumaba 1.
- Es decir, $7x=49$.
- Y antes de multiplicarlo por 7 no tenía 49, sino la séptima parte de 49:

$$\frac{\cancel{7}x}{\cancel{7}}=x=\frac{49}{7}=7$$

- Esto significa que pensó el número 7.
- Ahora verificamos que es verdad:

$$\begin{aligned} 7x+1 &= 50 \\ 7(7)+1 &= 50 \end{aligned}$$

En el primer ejemplo lo que no conocíamos era el número que pensó. En una ecuación, la incógnita representa un dato que no conocemos. Por eso, en el ejemplo anterior representamos la incógnita con la letra x.

Las incógnitas se representan por medio de letras cuando escribimos una ecuación.

El grado de una ecuación indica el mayor exponente que tiene alguna incógnita de la misma. En el ejemplo del número que pensó, la incógnita tiene exponente 1, por eso es una ecuación de primer grado.

Una ecuación puede tener más de una incógnita, pero en esta lección, solamente estudiaremos las ecuaciones con una incógnita.

Dejaremos las ecuaciones con más incógnitas para más adelante. Para poder resolver ecuaciones con varias incógnitas primero necesitas entender cómo se resuelven las ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Ejemplo 2

Resuelve la siguiente ecuación:

$$3x + 5 = 20$$

- Podemos razonar igual que en el ejemplo anterior: primero multiplicaron por 3, y al resultado le sumaron 5 y finalmente obtuvieron 20.
- El problema dice: «*Pensé un número, lo multipliqué por 3, al resultado le sumé 5 y obtube 20. ¿Qué número pensé?*»
- Antes de sumar 5 no tenían 20, sino $20 - 5 = 15$

$$3x + 5 - 5 = 20 - 5 = 15$$

- Y antes de multiplicar por 3 no tenían 15, sino 15/3:

$$\frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} = x = \frac{15}{3} = 5$$

- Eso indica que la solución de la ecuación es $x = 5$.
- Comprobación:

$$\begin{aligned} 3x + 5 &= 20 \\ 3(5) + 5 &= 20 \\ 15 + 5 &= 20 \end{aligned}$$

La solución de una ecuación es el (conjunto de) valor(es) que debe(n) tomar la(s) incógnita(s) para que la igualdad resulte verdadera.

En el ejemplo anterior la solución de la ecuación es $x = 5$ porque cuando sustituimos este valor, la igualdad se cumple. Sin embargo, cuando sustituimos otro valor la igualdad no se cumple. Por ejemplo, si sustituimos 1 en lugar de x obtenemos:

$$\begin{aligned} 3x + 5 &= 20 \\ 3(1) + 5 = 8 &\neq 20 \end{aligned}$$

Las ecuaciones de primer grado pueden tener más de una solución. También es posible que **no** tengan solución.

Algunas ecuaciones tienen incógnitas en ambos lados de la igualdad.

Ejemplo 3

Resuelve la siguiente ecuación lineal:

$$2x + 2 = x + 6$$

- Observa que tenemos tanto números en ambos lados de la igualdad como incógnitas.
- La primera estrategia consiste en restar 2 en ambos lados de la ecuación para que del lado izquierdo de la igualdad desaparezca el 2:

$$\begin{aligned} 2x + \cancel{2} - \cancel{2} &= x + 6 - 2 \\ 2x &= x + 4 \end{aligned}$$

- Ahora vamos a restar x en ambos lados de la iguadad para que tengamos la incógnita solamente en el lado izquierdo de la igualdad:

$$\begin{aligned} 2x - x &= \cancel{x} + 4 - \cancel{x} \\ x &= 4 \end{aligned}$$

- Entonces, la solución de la ecuación es: $x = 4$.
- Comprobación:

$$\begin{aligned} 2x + 2 &= x + 6 \\ 2(4) + 2 &= (4) + 6 \\ 8 + 2 &= 10 \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Resuelve la siguiente ecuación lineal:

$$5x - 2 = 3x + 2$$

- Primero podemos sumar en ambos lados de la igualdad 2:

$$\begin{aligned} 5x - \cancel{2} + \cancel{2} &= 3x + 2 + 2 \\ 5x &= 3x + 4 \end{aligned}$$

- Ahora podemos sumar en ambos lados de la igualdad el término: $-3x$

$$\begin{aligned} 5x - 3x &= \cancel{3x} + 4 - \cancel{3x} \\ 2x &= 4 \end{aligned}$$

- Finalmente dividimos ambos lados de la igualdad entre 2 y obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} &= \frac{4}{2} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

- Esto nos indica que la solución de la ecuación: $5x - 2 = 3x + 2$ es: $x = 2$.
- Comprobación:

$$\begin{aligned} 5x - 2 &= 3x + 2 \\ 5(2) - 2 &= 3(2) + 2 \\ 10 - 2 &= 6 + 2 \\ 8 &= 8 \end{aligned}$$

Hasta aquí hemos trabajado con ecuaciones con coeficientes enteros. Sin embargo también podemos encontrar ecuaciones con coeficientes fraccionarios.

El método de solución de las ecuaciones lineales con coeficientes fraccionarios es exactamente igual que su contraparte con coeficientes fraccionarios. La única diferencia consiste en que ahora en lugar de realizar operaciones con números enteros, las tendremos que hacer con fracciones.

Ejemplo 5

Resuelve la siguiente ecuación lineal:

$$\frac{3}{2}x+1=\frac{5}{4}$$

- Empezamos notando que tenemos coeficientes fraccionarios.
- Para empezar simplificando la ecuación vamos a sumar -1 en ambos lados de la ecuación:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}x+\cancel{1}-\cancel{1} &= \frac{5}{4}-1\\
\frac{3}{2}x &= \frac{5}{4}-\frac{4}{4}\\
\frac{3}{2}x &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

- Observa que tomamos ventaja del hecho de que un número (disntito de cero) dividido por sí mismo siempre es igual a la unidad.
- Eso nos permite escribir al número 1 como la fracción $4/4$, así es más fácil realizar la resta de fracciones, dado que tenemos el mismo denominador.
- Si eres observador, ya te habrás dado cuenta que cuando queremos simplificar una ecuación que tiene un coeficiente k, dividíamos por ese número.
- Pero dividir por el coeficiente k es lo mismo que multiplicar por el número $1/k$, es decir, por su recíproco.
- Entonces, ahora debemos multiplicar por $2/3$ ambos lados de la igualdad para simplificar la ecuación:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\\
x &= \frac{2}{12}=\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

- Entonces, la solución de la ecuación es $x=1/6$.
- Para verificar que la solución es correcta, basta sustituir el valor de la solución en la ecuación:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}\cdot(x)+1 &= \frac{5}{4}\\
\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{6}\right)+1 &= \frac{5}{4}\\
\frac{\cancel{3}}{\cancel{12}}+1 &= \frac{5}{4}\\
\frac{1}{4}+\frac{4}{4} &= \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

- Entonces, la solución de la ecuación es correcta, porque la igualdad se cumple.

Como puedes ver, la solución de ecuaciones con coeficientes fraccionarios utiliza exactamente el mismo procedimiento que las ecuaciones con coeficientes enteros.

Independientemente de la complejidad de la ecuación lineal con coeficientes fraccionarios, siempre podemos resolverla utilizando el mismo procedimiento para resolverla suponiendo que sus coeficientes son enteros.

Esto es así porque tanto los números enteros como los números racionales (las fracciones) son números reales, y cuando resolvemos una ecuación suponemos que esta tiene solución en el conjunto de los números reales.

Salvo el ejemplo donde se pensó un número, las ecuaciones que hemos resuelto nos han servido solamente para ejercitarnos mentalmente y entender cómo pensamos cuando resolvemos un problema práctico.

Pero en realidad las ecuaciones lineales se inventaron para resolver problemas cotidianos.

El siguiente ejemplo muestra un problema donde las aplicamos.

Carmela tiene el triple de años que su hija María. Ambas edades suman 60 años. ¿Qué edad tiene cada una de ellas? **Ejemplo 6**

- Si María tiene x años, entonces, Carmela tiene $3x$ años (el triple de la edad de su hija).
- La suma de las dos edades es 60 años. Entonces,

$$\text{Edad de María} + \text{Edad de Carmela} = 60$$

- Matemáticamente, tenemos:

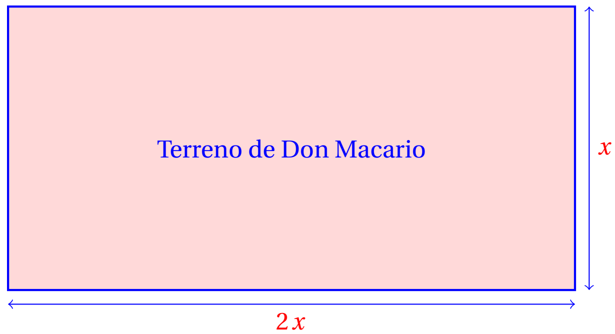
$$\begin{aligned} x + 3x &= 60 \\ 4x &= 60 \\ \frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} &= \frac{60}{4} \\ x &= 15 \end{aligned}$$

- Es decir, María tiene 15 años (recuerda que x representa la edad de María), y su mamá Carmela tiene: $(3)(15) = 45$ años.
- Y cumple con la condición de que al sumar las edades obtengamos 60: $15 + 45 = 60$.

En matemáticas también se usan ecuaciones para resolver problemas geométricos que, muchas de las veces corresponden a problemas prácticos.

Don Macario compró un terreno. Para cercarlo completamente necesitó 42 metros de malla. El terreno tiene forma rectangular y el largo mide el doble del ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno? **Ejemplo 7**

- Este problema en realidad es de geometría: «*Encontrar las dimensiones del rectángulo con perímetro 42 con el largo igual al doble del ancho.*»
- Nosotros lo vamos a aplicar al problema de Don Macario.
- Para formarnos una idea más clara del problema vamos a dibujar un diagrama con la información que tenemos:



- Observa que x representa la longitud del ancho del rectángulo, y el largo, por ser igual al doble del ancho, lo obtenemos multiplicando x por 2.
- La longitud de la cerca que utilizaron debe ser igual al perímetro del rectángulo.
- El perímetro del rectángulo es igual a la suma de las longitudes de los lados del terreno:

$$(x+2x)+(x+2x)=6x$$

  y sabemos que esa longitud es igual a 42 metros, la longitud de la malla.
- Entonces, la ecuación lineal que modela esta situación es:

$$6x=42$$

- Esta ecuación es muy fácil de resolver.
- En palabras nos dice: «*Pensé un número (x) lo multipliqué por 6 y obtuve 42. ¿Qué número pensé?*»
- La respuesta es inmediata: pensó 7, porque $(6)(7)=42$.
- Recuerda que x representa la longitud del ancho del terreno.
- Entonces, las dimensiones del rectángulo son: 7 metros de ancho y 14 metros de largo.
- Vamos a verificar que este resultado realmente satisface las condiciones del problema.
- El ancho mide 7 metros y el largo el doble, es decir, 14 metros.
- El perímetro es igual a la suma de $7+7+14+14=42$ metros.
- Entonces, el problema está resuelto correctamente.

Otra forma de resolver el problema es como sigue: Sabemos que necesitaron 42 metros de malla para cercar el terreno. Del diagrama es evidente que se requieren $x+2x$ metros de malla para cercar la mitad del terreno, y la mitad de 42 metros es 21 metros.

Entonces,

$$x+2x=3x=21$$

Y para que la igualdad se cumpla se requiere que $x=7$, porque la igualdad nos dice: «*Pensé un número, lo multipliqué por 3 y obtuve 21*» — Pues debió pensar el número 7.

Otro problema aplicado es el siguiente.

Ejemplo 8

En Monterrey, N.L., un taxi cobra \$7.40 pesos al pedir servicio, más \$4.70 pesos por kilómetro recorrido. Cuando vamos a comprar la despensa de mi casa pagamos \$21.50 pesos. ¿A qué distancia en kilómetros está el supermercado?

- Nuestra incógnita, es decir, el valor que queremos calcular, es la distancia de mi casa al super.
- Vamos a denotar a ese número con la letra x.
- Sabemos que por cada kilómetro que recorre el taxi me cobra \$4.70 pesos más.
- Es decir, si recorre un kilómetro me cobra \$7.40 pesos + \$4.70 pesos más.
- Si recorre dos kilómetros me cobra \$7.40 pesos + (2)(\$4.70) pesos más.
- Y si recorre tres me cobrará: \$7.40 pesos + (3)(\$4.70) pesos más.
- Y así sucesivamente...
- Si recorrió x kilómetros debemos pagar: $7.40+(4.70)(x)$.
- Tuve que pagar \$21.50 pesos, entonces:

$$21.50 = 7.40 + (4.70)(x)$$

- Lo que necesitamos es calcular el valor de x para que se cumpla la igualdad.
- Esta ecuación se resuelve igual que los casos de los ejemplos anteriores.
- Empezamos sumando en ambos lados de la igualdad -7.40:

$$\begin{aligned} 21.50 - 7.40 &= \cancel{7.40} + 4.70 \cdot x - \cancel{7.40} \\ 14.10 &= 4.70 \cdot x \end{aligned}$$

- Ahora dividimos ambos lados de la igualdad entre 4.70:

$$\begin{aligned} \frac{14.10}{4.70} &= \frac{\cancel{4.70} \cdot x}{\cancel{4.70}} \\ 3 &= x \end{aligned}$$

- Entonces, la distancia que hay desde mi casa hasta el supermercado es de 3 kilómetros.
- Ahora vamos a verificar que esto sea correcto:

$$\begin{aligned} P &= 7.40 + 4.70 \cdot x \\ &= 7.40 + (4.70)(3) \\ &= 7.40 + 14.10 \\ &= 21.50 \end{aligned}$$

que es precisamente lo que pagamos al taxista.

Ejemplo 9

Isabel tiene en total \$65.00 pesos en 22 monedas. Algunas monedas son de \$2.00 pesos y las demás son de \$5.00 pesos. ¿Cuántas monedas tiene de cada denominación?

- Sabemos que tiene en total 22 monedas.
- Si ella tuviera 10 monedas de \$2.00 pesos, las demás, es decir, $22 - 10 = 12$ monedas serían de \$5.00 pesos.
- Entonces, si tiene x monedas de \$2.00 pesos, las de \$5.00 pesos serán $22 - x$ monedas.

- La cantidad de dinero que tiene en las monedas de \$2.00 pesos es: $2x$.
- La cantidad de dinero que tiene en monedas de \$5.00 pesos es: $5\cdot(22-x)$.
- Y en total sabemos que tiene \$65.00 pesos.
- Si sumamos el dinero que tiene en monedas de \$2.00 pesos con las de \$5.00 pesos obtenemos lo que tiene en total.
- Entonces, la ecuación que modela esta situación es:

$$65 = 2x + 5\cdot(22-x)$$

- Para resolverla empezamos multiplicando por 5 dentro del paréntesis:

$$\begin{aligned} 65 &= 2x + 110 - 5x \\ 65 &= 110 - 3x \end{aligned}$$

- Ahora sumamos en ambos lados de la ecuación: $3x$ para simplificarla:

$$\begin{aligned} 65 + 3x &= 110 - \cancel{3x} + \cancel{3x} \\ 65 + 3x &= 110 \end{aligned}$$

- Ahora sumamos -65 en ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned} \cancel{65} + 3x - \cancel{65} &= 110 - 65 \\ 3x &= 45 \end{aligned}$$

- Finalmente, dividimos ambos lados de la igualdad entre 3:

$$\begin{aligned} \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} &= \frac{45}{3} \\ x &= 15 \end{aligned}$$

- Recuerda que x representa la cantidad de monedas de \$2.00 pesos que tiene Isabel, entonces, tiene $22-15=7$ monedas de \$5.00 pesos.
- Vamos a verificar que los cálculos sean correctos.

$$\begin{aligned} 65 &= 2x + 5\cdot(22-x) \\ 65 &= 2(15) + 5\cdot(22-15) \\ 65 &= 30 + 5\cdot(7) \\ 65 &= 30 + 35 \end{aligned}$$

- Esto nos indica que el resultado es correcto.

En el ejemplo anterior, si hubieramos encontrado que la solución de la ecuación **no** era un número entero (sí lo es), entonces deberíamos revisar nuestro procedimiento, porque Isabel no puede tener, por ejemplo, 12.33 monedas de \$2.00 pesos.

En caso de que revisaramos el problema y vieramos que el resultado es correcto, entonces podríamos concluir que el problema **no** tiene sentido físico, a pesar de que tiene solución matemática. En otras palabras, el problema está mal planteado. Indicar esto también puede ser la solución a un problema.

Ejemplo 10 David compró 9 manzanas. En el camino a su casa se comió 2 de esas manzanas y el resto las vendió, aumentando el precio en \$4.00 pesos. Finalmente ganó \$4.00 pesos. ¿Cuánto pagó David por cada manzana cuando las compró?

- Queremos saber cuál era el precio inicial de las manzanas.
- Sabemos que compró 9, y se comió 2, por lo que vendió 7 manzanas y todas al mismo precio.
- Supongamos que le costo $\$x$ pesos cada manzana.
- Entonces, como él compró 9, debió pagar: $9x$.
- Sabemos que él aumentó el precio original en \$4.00 pesos para venderlas más caras y recuperar las que ya se había comido.
- El precio al que vendía las manzanas era: $x+4$.
- Pero él vendió 7 de esas manzanas, con lo que obtuvo $7(x+4)$.
- Y con eso ganó \$4.00 pesos. Es decir,

$$\begin{aligned} 7\cdot\text{Precio de venta} &= 9\cdot\text{Precio de compra}+4 \\ 7\cdot(x+4) &= 9\cdot x+4 \end{aligned}$$

- Ahora debemos resolver esta ecuación.
- Empezamos multiplicando por 7 dentro del paréntesis:

$$\begin{aligned} 7(x+4) &= 9x+4 \\ 7x+28 &= 9x+4 \end{aligned}$$

- Ahora sumamos en ambos lados de la igualdad, primero -4 y después $-7x$ para simplificar la ecuación:

$$\begin{aligned} \cancel{7x}+28-4-\cancel{7x} &= 9x+\cancel{4}-\cancel{4}-7x \\ 24=2x &\Rightarrow 2x=24 \end{aligned}$$

- Y esto nos dice en palabras. «*Pensé un número, lo multipliqué por 2 y obtuve 24. ¿Qué número pensé?*» Obviamente, pensó el número 12.
- Entonces, le costaron a \$12.00 pesos cada manzana.
- Vamos a verificar el resultado: si le costaron \$12.00 pesos, él debió pagar en total $(12)(9)=108$ pesos.
- Para venderlas aumentó el precio en \$4.00 pesos, por lo recibía $12+4=16$ pesos por cada manzana que vendía.
- Él vendió solamente 7 de las 9 manzanas, porque él se comió 2, y por las que vendió en total recibió: $(7)(16)=112$ pesos.
- Como pagó 108 pesos por las manzanas, en total ganó $112-108=4$ pesos.

En este último ejemplo, pudimos haber tenido una solución con decimales. En este contexto no tiene caso considerar más de dos decimales, porque cuando contamos dinero, lo más que contamos son centavos, que representan centésimas partes de un peso.

Debes cuidar la forma en como presentas las soluciones de los problemas. En algunos casos la solución del problema **no** es solamente un número, pues se requiere especificar unidades. En el ejemplo anterior, las unidades eran pesos. En otros contextos, el problema te indicará cuáles son las unidades que debes incluir en la solución del problema.

En el siguiente ejemplo se trata de encontrar cuándo dos cantidades se igualan.

Ejemplo 11

Miguel gana actualmente \$8 100.00 pesos mensuales y cada mes tiene un aumento en su salario de \$300.00 pesos. Por otra parte, Javier actualmente gana \$10 400.00, pero su incremento en el salario mensual es de \$200.00 pesos. Javier quiere saber cuántos meses deben pasar para tener un salario igual al de Miguel.

- Primero debemos reconocer que ambos tienen aumento mensual en sus salarios.
- Otra cuestión importante a considerar consiste en que Javier desea conocer la cantidad de tiempo que debe pasar para ganar lo mismo que Miguel.
- Por último, dado que los dos tienen aumento en sus salarios, el tiempo que pase a partir de hoy, será el mismo para ambos..., aunque no tienen los mismos aumentos en cada mes...
- Con esta información en mente, iniciamos:
- Actualmente Miguel gana \$8 100.00 pesos y cada mes aumenta su salario en \$300.00 pesos.
- Si m es el número de meses que han pasado, el nuevo salario para él (M) se calcula sumando $300\,m$ al salario actual.
$$M = 8\,100 + 300\,m$$
- De manera semejante, el salario de Javier aumenta cada mes \$200.00, aunque gana actualmente \$10 400.00 pesos.
- El nuevo salario para él (J), después de m meses, es:
$$J = 10\,400 + 200\,m$$
- Javier quiere conocer cuántos meses (m) deben pasar para que su salario (J) sea igual al salario de Miguel (M):
$$\begin{aligned} J &= M \\ 10\,400 + 200\,m &= 8\,100 + 300\,m \end{aligned}$$
- Nosotros necesitamos calcular el valor de m, es decir, encontrar el número de meses que deben pasar para que los salarios sean iguales.
- Empezamos sumando en ambos lados de la igualdad $-8\,100$:
$$\begin{aligned} 10\,400 + 200\,m - 8\,100 &= \cancel{8\,100} + 300\,m - \cancel{8\,100} \\ 2\,300 + 200\,m &= 300\,m \end{aligned}$$
- Ahora sumamos en ambos lados de la igualdad $200\,m$:
$$\begin{aligned} 2\,300 + \cancel{200\,m} - \cancel{200\,m} &= 300\,m - 200\,m \\ 2\,300 &= 100\,m \end{aligned}$$
- Finalmente, dividimos entre 100 ambos lados de la igualdad y encontramos el valor de la incógnita:
$$\begin{aligned} \frac{2\,300}{100} &= \frac{100\,m}{100} \\ 23 &= m \end{aligned}$$

- Lo que nos indica que deben pasar 23 meses para que ambos tengan el mismo salario.
- Ahora comprobamos que esto sea verdad:
- En 23 meses el salario de Miguel será:

$$\begin{aligned} M &= 8\,100 + 300\,m \\ &= 8\,100 + 300(23) \\ &= 8\,100 + 6\,900 \\ &= 15\,000 \end{aligned}$$

- Por otra parte, el salario de Javier será:

$$\begin{aligned} J &= 10\,400 + 200\,m \\ &= 10\,400 + 200(23) \\ &= 10\,400 + 4\,600 \\ &= 15\,000 \end{aligned}$$

- Entonces, en 23 meses, suponiendo que siguen teniendo el mismo aumento mensual en sus salarios, ambos ganarán \$15 000.00 pesos.

Este problema por casualidad tiene una solución entera, pero no necesariamente debe ser así. Si Miguel ganara \$8 200, por decir algo, el resultado no sería entero para que ambos ganaran la misma cantidad.

El punto que debes entender aquí consiste en que la solución de una ecuación lineal **no** siempre es un número entero.

También es importante que recuerdes que debes verificar que la solución del problema que has resuelto realmente satisfaga las condiciones del problema.

Muchas de las veces encontramos la solución de un problema y creemos ciegamente que esa solución es correcta, aunque no siempre es así. Por esto, es una buena idea verificar que la solución que hemos encontrado realmente satisface las condiciones que el problema impone.

En caso de que no las satisfaga, lo más sensato es revisar el procedimiento y corregirlo.

También es importante que entiendas un principio muy utilizado en matemáticas. Siempre que tenemos una ecuación lineal distinta a las que ya has resuelto, aplicando las propiedades de los números reales la simplificamos hasta obtener una ecuación lineal parecida a una que ya hayamos resuelto.

Por ejemplo, en el problema de las manzanas de David que se encuenta en la página 116, se modeló con la ecuación:

$$9\,x + 4 = 7(x + 4)$$

la fuimos transformando hasta obtener la ecuación:

$$2\,x = 24$$

que resolvimos con el método del problema de «*pensé un número*».

Pero para transformar una ecuación en la otra solamente utilizamos las propiedades de los números reales y de la igualdad para obtener una ecuación que tenga la misma solución que la primera.

Cuando hacemos eso, decimos que en cada paso obtenemos una ecuación equivalente, porque ambas ecuaciones tiene exactamente la misma solución.

Entonces, las ecuaciones:

$$9x+4=7(x+4) \qquad \text{y} \qquad 2x=24$$

son equivalentes porque la solución de ambas ecuaciones es el mismo valor: $x=12$.

Para verificar que esto es verdad, basta sustituir el valor de su solución en ambas ecuaciones y cada una debe reducirse a una igualdad que es verdadera.

Ejemplo 12

Un comerciante prepara una mezcla vitamínica con dos disoluciones. El precio de la disolución de la vitamína A es de \$14.00 pesos por litro, y el precio de la disolución de la vitamina B es de \$18.00 pesos por litro. Al combinar las disoluciones obtuvo 25 litros una mezcla que tiene un precio de \$15.92 por litro. ¿Cuántos litros de cada disolución utilizó para preparar la mezcla?

- Sabemos que si sumamos los litros de las disoluciones de vitamina A y de vitamina B, en total obtendremos 25 litros.
- Asi que, si se tenía x litros de disolución de vitamina A, los litros de vitamina B son: $25-x$.
- Los precios de cada disolución se pueden representar en una tabla:

Disolución	Cantidad (L)	Precio (\$/L)
Vitamina A	x	14.00
Vitamina B	$25-x$	18.00
Mezcla	25	15.92

- Con la información contenida en la tabla es sencillo deducir que el precio de x litros de la disolución de vitamina A es: $14x$ pesos.
- Por otra parte, el precio de $25-x$ litros de la disolución de vitamina B es: $18\cdot(25-x)$ pesos.
- La suma de los anteriores debe ser igual a el precio de los 25 litros de la mezcla: $(25)(15.92)=398$ pesos.
- Entonces,

$$\begin{aligned} 14x+18\cdot(25-x) &= 398 \\ 14x+450-18x &= 398 \\ -4x+450 &= 398 \end{aligned}$$

- Ahora podemos sumar en ambos lados de la igualdad $4x$ y después -398:

$$\begin{aligned} -\cancel{4x}+450+\cancel{4x}-398 &= \cancel{398}+4x-\cancel{398} \\ 52 &= 4x \\ \frac{52}{4} &= \frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} \\ 13 &= x \end{aligned}$$

- Esto nos indica que utilizó 13 litros de la disolución de vitamina A y $25-13=12$ litros de la disolución de la vitamina B para preparar la mezcla.
- Ahora vamos a verificar que la solución satisfaga las condiciones del problema:
  - ✓ Por los 13 litros de vitamina A tenía: $(13)(14)=\$182$ pesos.

✓ Por los 12 litros de vitamina B tenía: $(12)(18) = \$216$ pesos.

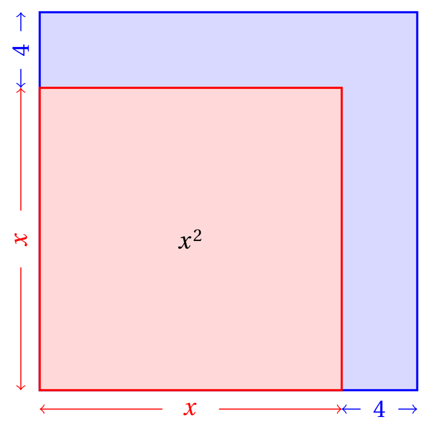
✓ En total, los 25 litros de la mezcla, tenía: $182 + 216 = 398$ pesos.

✓ Y cada litro de la mezcla debía costar: $398/25 = 15.92$ pesos.

- Como el precio de la mezcla que nos dieron en el problema coincide con el que calculamos a partir del resultado, la solución del problema es correcta.

Cuando la longitud de un cuadrado se aumenta en 4 cm, su área aumenta en 200 cm^2. ¿Cuál es el área del cuadrado inicial? **Ejemplo 13**

- Lo que sabemos es que el área aumenta 200 cm^2 cuando las longitudes de sus lados aumentan 4 cm.
- Supongamos que el lado del cuadrado inicial mide x cm, entonces la longitud del lado cuando se aumentaron 4 cm es: $x + 4$.



- El área del cuadrado inicial es: x^2.
- El área del nuevo cuadrado es: $(x+4)^2$.
- Sabemos que el nuevo cuadrado tiene 200 cm^2 más de área, entonces:

$$
\begin{aligned}
\text{Área cuadrado original} + 200 &= \text{Área nuevo cuadrado}\\
x^2 + 200 &= (x+4)^2\\
\cancel{x^2} + 200 &= \cancel{x^2} + 8x + 16\\
200 &= 8x + 16\\
200 - 16 &= 8x\\
\frac{184}{8} &= x = 23
\end{aligned}
$$

- Entonces, la longitud de los lados del otro cuadrado es de $23 + 4 = 27$ cm.
- El cuadrado incial tiene un área de: $x^2 = (23)^2 = 529$ cm^2.
- El otro cuadrado tiene un área de: $(x+4)^2 = (27)^2 = 729$ cm^2.

Ejemplo 14

Un rectángulo tiene 6 metros de largo más que de ancho. Cuando se aumenta su largo en 2 metros y su ancho en 3 metros, el área aumenta 84 metros cuadrados. ¿Cuáles eran las dimensiones del rectángulo antes de aumentar su tamaño?

- Sabemos que originalmente tenía 6 metros más de largo que de ancho.
- Si x es su ancho, el largo será: $x+6$.
- Si se aumenta el largo en 2 metros el rectángulo nuevo tendrá un largo de $(x+6)+2=x+8$.
- Por otra parte, si el ancho se incrementa en tres metros, tendrá: $x+3$.
- El área del nuevo rectángulo rebasa a la del rectángulo original en 84 m^2
- La ecuación que modela la situación actual es:

$$\begin{aligned}\text{Área del rectángulo original}+84\text{ m}^2 &= \text{Área del nuevo rectángulo}\\ x(x+6)+84 &= (x+3)(x+8)\end{aligned}$$

- Ahora tratamos de simplificar la ecuación:

$$\begin{aligned}x(x+6)+84 &= (x+3)(x+8)\\ \cancel{x^2}+6x+84 &= \cancel{x^2}+11x+24\end{aligned}$$

- La ecuación se simplifica a una lineal:

$$\begin{aligned}6x+84 &= 11x+24\\ 84-24 &= 11x-6x\\ 60 &= 5x\end{aligned}$$

- Esto nos indica que el ancho del rectángulo original era de 12 metros.
- El largo era de $12+6=18$.
- Verifica que la solución satisface las condiciones del problema.

Otro ejemplo que viene de las fracciones algebraicas es el siguiente.

Ejemplo 15

María de Jesús debía comprar x boletos de Monterrey, N.L., a Tampico, Tamps. Cuando llegó a la central de autobuses se encontró con que había un descuento del 40% en el boleto. Ella llevaba \$720.00 pesos para comprar los boletos. Con el descuento ella ahora podía adquirir un boleto más y todavía le sobraban \$72.00 pesos. ¿Cuántos boletos compró y cuánto le costaban sin el descuento?

- Vamos a denotar con la literal x a la cantidad de boletos que ella debía comprar.
- Si cada boleto sin descuento le costaba p pesos, ella debía pagar $p\cdot x=720$ pesos en total.
- Esto nos indica que: $p=\dfrac{720}{x}$.
- Con el descuento ella solamente pagaba: $0.6\,p$, porque le descontaban el 40% del precio.

- Así, ella podía comprar un boleto más, es decir, un total de $(x+1)$ boletos.
- Y le sobrarían \$72.00 pesos.
- Esta situación se modela con la siguiente ecuación:

$$(0.6\,p)(x+1)+72=720$$

- De esta ecuación podemos despejar el valor de p:

$$\begin{aligned}
(0.6\,p)(x+1) &= 720-72\\
p &= \frac{648}{0.6(x+1)}=\frac{648}{\left(\dfrac{6}{10}\right)(x+1)}\\
&= \frac{(648)(10)}{(6)(x+1)}\\
&= \frac{6480}{6(x+1)}\\
&= \frac{1\,080}{x+1}
\end{aligned}$$

- En todo este desarrollo, hemos supuesto que el precio de cada boleto sin descuento es p pesos.
- Esto nos permite igualar ambos valores de p: dado que son el mismo, son iguales.

$$\begin{aligned}
p=\frac{720}{x} &= \frac{1\,080}{x+1}\\
720(x+1) &= 1\,080\,x\\
720\,x+720 &= 1\,080\,x\\
720 &= 1\,080\,x-720\,x\\
720 &= 360\,x\\
x &= \frac{720}{360}=2
\end{aligned}$$

- Entonces, la solución de la ecuación es: $x=2$.
- Es decir, María de Jesús debía comprar 2 boletos.
- Vamos a hacer la comprobación:

Comprobación

- ✓ Como ella llevaba \$720.00 pesos y debía comprar dos boletos, cada uno le costaba \$720.00 $\div$ 2 = \$360.00 pesos.
- ✓ Le ofrecieron el 40 % de descuento, por lo que cada boleto le íba a costar: (0.6)(\$360) = \$216.00 pesos.
- ✓ Si hubiera comprado 3 boletos a ese precio debía pagar: (3)(\$216.00) = \$648.00 pesos.
- ✓ Como ella llevaba \$720.00 pesos le sobraban: \$720.00 − \$648.00 = \$72.00 pesos.

Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones. En los problemas aplicados, primero encuentra la ecuación que modela cada situación y resuélvela. Ten ciudado con la interpretación del resultado de la ecuación.

Ejercicios 3.1

1) $8x+2=-14$ **R.** $x=-2$

2) $9x-1=-37$ **R.** $x=-4$

3) $5x+9=-11$ **R.** $x=-4$

4) $4x+3=-5$ **R.** $x=-2$

5) $x+9=13$ **R.** $x=4$

6) $7x-5=-26$ **R.** $x=-3$

7) $x-3=1$ **R.** $x=4$

8) $7x-7=-21$ **R.** $x=-2$

9) $2x-3=5$ **R.** $x=4$

10) $5x+12=8x$ **R.** $x=4$

11) $3x-28=-4x$ **R.** $x=4$

12) $8x-18=-x$ **R.** $x=2$

13) $2x-20=-3x$ **R.** $x=4$

14) $9x-15=4x$ **R.** $x=3$

15) $6x-9=-3x$ **R.** $x=1$

16) $x+20=6x$ **R.** $x=4$

17) $8x-68=-9x$ **R.** $x=4$

18) $3x-10=-2x$ **R.** $x=2$

19) $5x-8=x$ **R.** $x=2$

20) $2x+12=7+7x$ **R.** $x=1$

21) $9x-30=6-9x$ **R.** $x=2$

22) $7x+11=9+8x$ **R.** $x=2$

23) $3x-16=8-5x$ **R.** $x=3$

24) $9x-12=3+4x$ **R.** $x=3$

25) $4x-19=8-5x$ **R.** $x=3$

26) $9x-12=4+x$ **R.** $x=2$

27) $5x-18=3-2x$ **R.** $x=3$

28) $2x+7=21$ **R.** $x=7$

29) $3x+4=5^2$ **R.** $x=7$

30) $5x-1=7x-5$ **R.** $x=2$

31) $3x+4=4x-8$ **R.** $x=12$

32) $7x-9=9x-31$ **R.** $x=11$

33) $3(x+1)=2(2x-3)$ **R.** $x=9$

34) $8x+1=3(x+4)+4$ **R.** $x=3$

35) Pensé un número. Lo multipliqué por siete, al resultado sumé nueve y finalmente obtuve cien. ¿Qué número pensé? 13

36) Las edades de Ana y su sobrina Isabel suman 40 años. Ana tiene el triple de años que Isabel. ¿Qué edad tiene cada una? Isabel: 10 años, Ana: 30 años.

37) Un padre y su hijo suman sus edades y obtienen 50 años. El padre tiene 30 años más que su hijo. ¿Qué edad tiene cada uno? Padre: 40 años, hijo: 10 años.

38) Un coleccionista tiene 45 estampillas postales. Los costos indicados de las estampillas son de \$5.00 y \$7.00 pesos. ¿Cuántas estampillas de cada tipo tiene si los costos indicados en las estampillas asciende a un total de \$269.00 pesos? 23 estampillas de \$5.00 y 22 estampillas de \$7.00 pesos.

39) En un taller mecánico hay x coches. Cada coche tiene 5 llantas exactamente (4 que usa y una de refacción). Calcula cuántos coches hay en el taller mecánico, sabiendo que hay en total 115 llantas. **R.** Hay 23 coches

40) Eliú debe \$17.00 pesos al tendero. Debe comprar refrescos que cuestan, cada uno, \$12.50 pesos. Si él sabe que le alcanza con \$104.50 pesos para pagar todo, ¿cuántos refrescos planea comprar? **R.** 7 refrescos.

41) Un coche avanza con una velocidad constante de 60 km/h**R.** Escribe la ecuación que nos ayuda a calcular la distancia D recorrida por ese coche t horas después de haber comenzado su recorrido. **R.** $D=60t$ [km]

42) La cantidad de calorías que contiene una tortilla depende de la cantidad de gramos que pesa la tortilla y del tipo de maíz del cual se elaboró. Suponiendo que 100 gramos de tortillas de maíz amarillo tienen 325 calorías, encuentra una ecuación que ayuda a calcular las calorías C que ingiere una persona que come x tortillas en una ración, si cada tortilla pesa 25 gramos. **R.** $C=81.25x$

43) Dos libros juntos pesan 2 500 gramos. El más pesado tiene 500 gramos más que el primero. ¿Cuánto pesa cada libro? 1 500 gr, 1 000 gr.

44) En una lista de 120 ejercicios, los problemas aplicados son el doble de los ejercicios de práctica. ¿Cuántos ejercicios son de cada tipo? 40 de práctica, 80 problemas aplicados.

45) Cierta compañía de transporte urbano, cobra \$120.00 pesos por brindar el servicio, más \$17.35 pesos por kilómetro recorrido. Por un viaje cobró \$900.75 pesos. ¿Qué tan largo fue el viaje? **R.** 45 km

46) Una compañía de mensajería y paquetería cobra \$35.85 pesos por envío más un cargo de \$127.45 pesos por cada kilogramo extra. Por un paquete Pablo pagó \$3 274.35 pesos. ¿Cuántos kilogramos extra tenía su paquete? **R.** 25.50 kg

47) Un laboratorista desea preparar una disolución del compuesto A con una concentración del 36%. Él tiene un matraz con 1 L de ese compuesto al 100% de concentración que desea utilizar para agregar x mL de esa solución a otro matraz que contiene 2400 mL de solución de ese compuesto al 20%. ¿Cuál es el valor de x que resuelve el problema al laboratorista? **R.** $x=600$ ml.

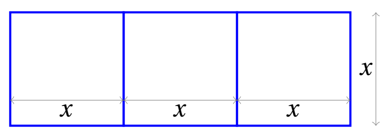
48) Un estudiante debe preparar 100 ml de un ácido al 22% a partir de dos muestras. La primera muestra tiene una concentración del 15%. La segunda muestra tiene una concentración del 25%. ¿Cuántos mililitros debe utilizar de cada muestra de ácido para obtener el ácido que debe preparar? 30 ml de ácido al 15% y 70 ml de ácido al 25%.

49) Una empresa fabrica sillas. Producir una silla le cuesta $135.00 pesos, y las vende a $225.00 pesos. Además tiene un costo fijo (luz, teléfono, agua, salarios, etc.) de $45,000.00 pesos mensuales. ¿Cuántas sillas debe vender para satisfacer los costos fijos y de producción y a partir de entonces, empezar a tener alguna utilidad? 500 sillas.

50) Las longitudes de los lados de un triángulo son números enteros consecutivos. Si su perímetro es de 78 cm, ¿Cuáles son las dimensiones de sus lados? 25, 26 y 27 cm.

51) El largo de un terreno tiene 15 metros más que su ancho. Para cercarlo, se necesitaron de 510 metros de cerca. ¿Cuáles son las dimensiones de ese terreno? 120 m × 135 m.

52) Un terreno rectangular tiene el triple de largo que de ancho. Para hacer 3 divisiones internas y cercarlo completamente se ocuparon 50 metros de malla ciclónica de alambre. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno? 5 m × 15 m.



53) Cuando la longitud de un cuadrado se aumenta en 2 cm, su área aumenta en 100 cm^2. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado inicial? 24 cm.

3.1.2 Ec. de primer grado y la función lineal

Como has visto en la sección anterior, en los problemas aplicados tenemos cantidades que dependen una de otra.

Por ejemplo, cuando vamos a comprar varios kilogramos de azúcar, si un kilogramo cuesta $13.00 pesos, la cantidad que debemos pagar por el azúcar que compremos depende del número de kilogramos que compremos de acuerdo a la siguiente relación:

$$P = 13\,x$$

donde P es la cantidad de pesos que debemos pagar y x representa el número de kilogramos de azúcar que compramos.

Cuando tenemos una relación como la anterior, decimos que una cantidad depende de la otra, o que es función, una cantidad de la otra.

En el caso de la ecuación anterior, el valor de P depende del valor de x, o bien, P está en función de x.

Las funciones son objetos matemáticos que nos indican cómo están relacionadas dos o más variables.

Una función es lineal cuando tiene la siguiente forma:

$$y = m\,x + b$$

donde tanto m como b son constantes y las literales y, x son variables o incógnitas.

El adjetivo «*lineal*» viene del hecho de que si graficamos la función en un sistema de coordenadas x, y, obtenemos una línea recta.

En la lista de ejercicios de la sección anterior algunas respuestas son funciones. Por ejemplo,

Un coche avanza con una velocidad constante de 60 km/hr. Escribe la ecuación que nos ayuda a calcular la distancia D recorrida por ese coche t horas después de haber comenzado su recorrido.	**Ejercicio**

La respuesta a este ejercicio es: $D = 60\,t$, si la distancia se mide en kilómetros.

Otro ejercicio que tiene por respuesta una función es el siguiente:

La cantidad de calorías que contiene una tortilla depende de la cantidad de gramos que pesa la tortilla y del tipo de maíz del cual se elaboró. Suponiendo que 100 gramos de tortillas de maíz amarillo tienen 325 calorías, encuentra una ecuación que ayuda a calcular las calorías C que ingiere una persona que come x tortillas en una ración, si cada tortilla pesa 25 gramos.	**Ejercicio**

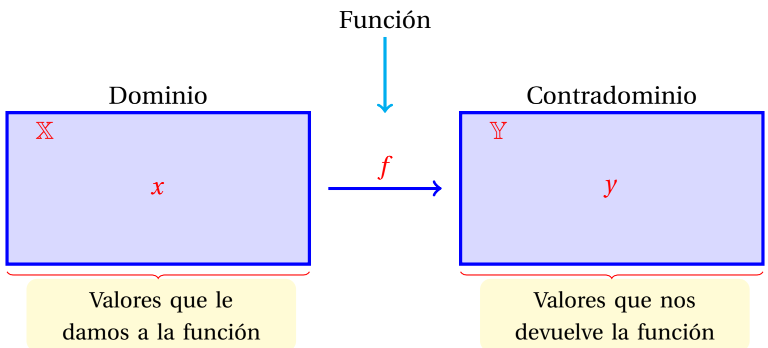
Y la respuesta a este ejercicio es: $C = 81.25\,x$. En este caso, la variable C que representa la cantidad de calorías que ingiere una persona, depende de la variable x, que representa la cantida de tortillas que ingiere esa persona. La variable C en este ejemplo es la *variable dependiente*, porque su valor depende del valor que tome x. Por otra parte, la variable x no depende de nadie, salvo del valor que queramos darle, por eso se dice que esta es la *variable independiente*.

Podemos pensar en una función como una máquina que transforma números: nosotros le damos un número y la función nos devuelve otro. Pero esa máquina debe devolvernos a lo más un único valor por cada valor que nosotros le demos.

Nosotros podemos darle muchos valores, aunque tal vez algunos no los pueda transformar. Es decir, tal vez no nos devuelva un valor cuando sustituyamos un valor específico. Al conjunto de valores que nosotros le podemos dar, le llamaremos *dominio* de la función.

La función nos estará devolviendo valores conforme nosotros le vayamos dando algunos valores. Al conjunto de valores que la función nos devuelve lo llamaremos *contradominio* de la función.

El siguiente diagrama puede ayudarte a entender mejor el concepto de función:



En este diagrama el dominio de la función se denota por el símbolo: $\mathbb{X}$, mientras que el contradominio se denota por el símbolo: $\mathbb{Y}$, y la función está representada por la literal: f.

Observa que la flecha va del conjunto $\mathbb{X}$ al conjunto $\mathbb{Y}$, indicando que la función toma valores del primer conjunto (dominio) y nos devuelve los valores del segundo conjunto (contradominio).

3.1.3 Interpretación gráfica (función lineal)

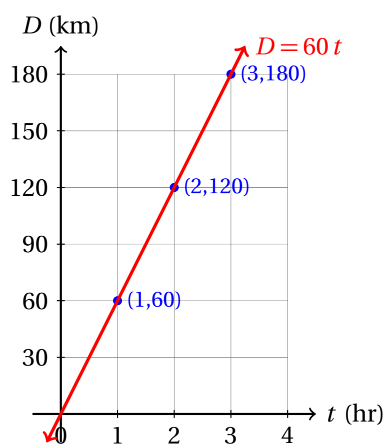
Considerando el problema:

Problema

Un coche avanza con una velocidad constante de 60 km/hr. Escribe la ecuación que nos ayuda a calcular la distancia D recorrida por ese coche t horas después de haber comenzado su recorrido.

La respuesta sabemos que es: $D = 60\,t$, si la distancia se mide en kilómetros.

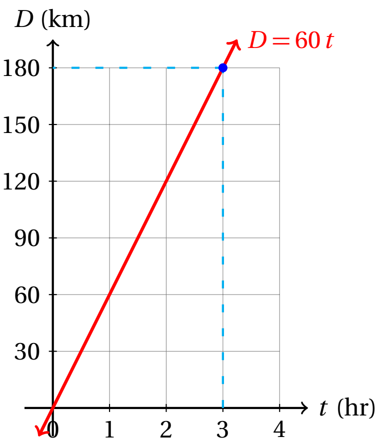
Si graficamos esta ecuación, asignando distintos valores a t y calculando sus respectivos valores para D, obtenemos:



Si nosotros deseamos conocer la distancia que ha recorrido en una cantidad de horas, por ejemplo, en 3 horas, podemos encontrar la respuesta en la gráfica.

Para esto, simplemente colocamos el lápiz en el eje del tiempo (dato que conocemos) y a partir del punto $(3,0)$ movemos verticalmente la punta del lápiz hasta cortar a la recta. A partir de ese punto movemos el lápiz hacia la izquierda hasta cortar el eje vertical (D).

El punto donde se corta a este eje representa la distancia que ha recorrido.



Por otra parte, si conocemos la distancia que recorrió y queremos saber cuánto tiempo requiere para avanzarla, empezamos del eje vertical y moviendo el lápiz horizontalmente (paralelo al eje t), hasta cortar la recta, empezamos a mover el lápiz verticalmente hasta cortar el eje horizontal (t).
El punto donde se corte representa el tiempo que necesitábamos encontrar.
Esta forma de resolver ecuaciones se conoce como el método gráfico, porque utilizamos una gráfica.

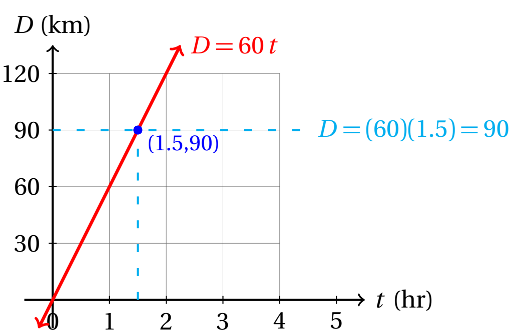
En matemáticas podemos decir que el punto donde se corta al eje (usando la gráfica) es una representación geométrica de la solución de una ecuación lineal.

Cuando hacemos la pregunta: «*¿Cuántas horas deben pasar para recorrer 90 km?*», geométricamente estamos dibujando una recta que corta al eje D en el punto $D = 90$, que representa una distancia de 90 kilómetros.

Cuando encontramos la intersección con la recta $D = 60\,t$ estamos encontrando el punto que satisface a ambas condiciones simultáneamente: (a) que la distancia recorrida sea 90 km, y (b) que el recorrido se haga a una velocidad constante de 60 km/h.

Al encontrar la intersección con el eje t, estamos resolviendo la pregunta anterior.

De manera semejante, podemos resolver la pregunta: «*¿Qué distancia recorrió 1.5 horas después de iniciado el viaje?*» En este caso empezamos dibujando una recta vertical (perpendicular al eje t) hasta que corte a la recta $D = 60\,t$. Después movemos el lápiz horizontalmente hasta cortar el eje D.



La solución gráfica de las ecuaciones algunas veces no es fácil de resolver. Además, no nos da la respuesta exacta, como es el caso de la solución algebraica. Y por si esto fuera poco, generalmente requiere más tiempo resolver una ecuación lineal por este método. Por estas razones es más común resolver las ecuaciones lineales por el método algebraico.

Entonces, ¿por qué tomarnos la molestia de estudiar este tema? Pues este método es de ayuda para algunos tipos de ecuaciones que no son lineales, además de que nos ayudan a intepretar las soluciones de las ecuaciones. Esto nos indicará cuándo algunas ecuaciones no tengan soluciones.

Puedes fácilmente encontrar el dominio de una función lineal. Dado que la función lineal es de la forma:

$$y = m\,x + b$$

Esta máquina para transformar números puede transformar cualquier número, dado que siempre podemos multiplicar un número cualquiera por m y al resultado sumarle b. Esto nos indica que puede transformar cualquier número. Por esto decimos que el dominio de la función lineal es el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$).

Es muy sencillo verificar que el contradominio de la función lineal (siempre y cuando $m \neq 0$) también es el conjunto de los números reales, para eso puedes pensar en la gráfica de una recta que no sea vertical.

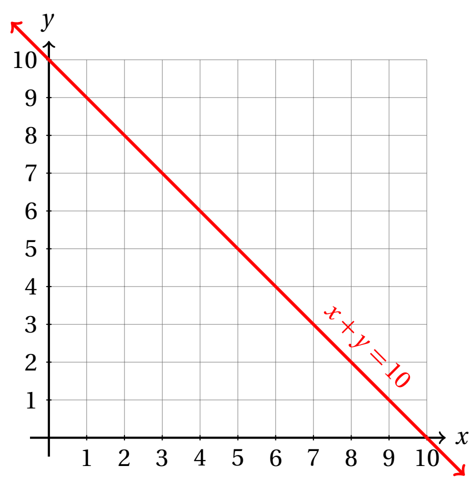
Por cierto, una recta horizontal sí es una función, pero una recta horizontal no lo es.

¿Puedes explicar por qué?

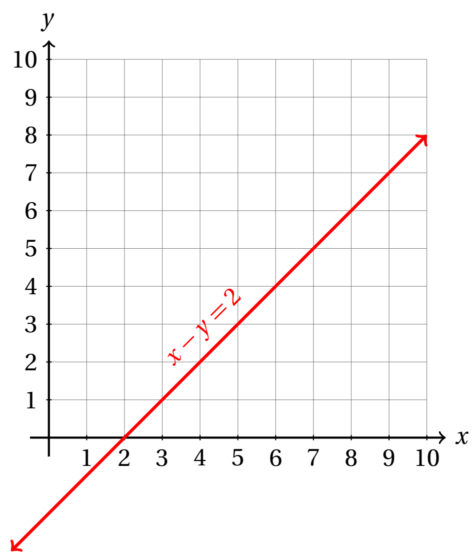
3.2 Sistemas de Ecuaciones lineales (2 incógnitas)

Como ya observaste, una ecuación lineal puede tener más de una variable, y en casos de dos variables, podemos graficar la ecuación en un plano cartesiano.

Por ejemplo, la ecuación: $x + y = 10$, en el plano cartesiano se grafica así:

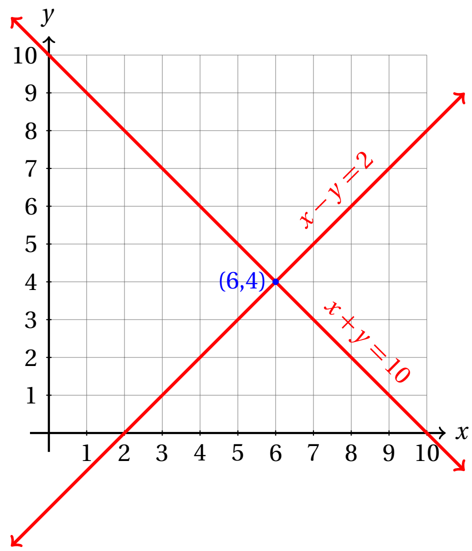


Mientras que la ecuación $x - y = 2$, gráficamente se representa así:



Si consideramos ambas ecuaciones graficadas en el mismo plano cartesiano tendremos dos rectas que se cortan en un solo punto, dado que las rectas evidentemente no son paralelas.

El punto donde se intersectan las dos rectas pertenece a ambas rectas. Y debido a que pertenece a la primera recta, sus coordenadas deben satisfacer la primera ecuación, y por pertenecer a la segunda ecuación, debe satisfacer la segunda ecuación también. Es decir, ese punto donde se intersectan las rectas satisface ambas ecuaciones (por eso pertenece a ambas rectas).



Ahora podemos considerar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x+y &= 10 \\ x-y &= 2 \end{aligned}$$

y al sustituir los valores $x = 6, y = 4$, vemos que las dos ecuaciones se satisfacen. Esto era de esperarse, dado que ese punto pertenece a las gráficas de ambas ecuaciones, y como ya habíamos dicho, satisfacen a ambas ecuaciones.

Entonces, podemos decir que este conjunto de valores es la solución del sistema de ecuaciones. En efecto,

$$\begin{aligned} x+y &= 10 \quad \Rightarrow \quad 6+4=10 \\ x-y &= 2 \quad \Rightarrow \quad 6-4=2 \end{aligned}$$

En conclusión, la solución del sistema de ecuaciones lineales (que abreviaremos con las siglas: S.E.L.) es: $x = 6, y = 4$.

3.2.1 Métodos algebraicos para resolver S.E.L.

Existen varios métodos para resolver los sistemas de ecuaciones lineales. En este curso estudiaremos los más comunes.

Antes de iniciar con el estudio de los métodos algebraicos, damos la siguiente definición:

Definición 1 Solución de un S.E.L.
Es el conjunto de valores que se debe sustituir en las variables de un S.E.L. para que cada una de las ecuaciones se reduzca a una igualdad verdadera.

En el programa de estudio de la Dirección General de Bachillerato se sugieren los siguientes:

- ✓ Eliminación, también conocido como Suma y Resta,
- ✓ Sustitución,
- ✓ Igualación, y finalmente

✓ Determinantes.

Estrictamente hablando, ya se introdujo el método más laborioso, que consiste en la graficación de las dos ecuaciones y encontrar el punto donde se intersectan. Este método se conoce como el método gráfico.

La desventaja de este método consiste en que la solución no siempre son números enteros, y en estos casos, lo más que podemos es hacer una aproximación a la solución del S.E.L.

Con los métodos algebraicos siempre obtenemos el valor exacto de la solución del sistema de ecuaciones lineales, sean enteros o no.

Método de Eliminación

Este método es de los más sencillos. Empezamos observando el S.E.L. Si es posible sumar las ecuaciones para obtener otra nueva ecuación con una incógnita menos, sumamos.

Resuelve:

$$\begin{aligned} x + y &= 10 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 1

- Si sumamos las dos ecuaciones obtenemos una sola ecuación con una sola incógnita, porque la literal y tiene el mismo coeficiente, pero con signo cambiado:

$$\begin{array}{rcl} x + \cancel{y} &=& 10 \\ x - \cancel{y} &=& 2 \\ \hline 2x \quad &=& 12 \end{array}$$

- Esta ecuación lineal con una incógnita es tan fácil de resolver que la traduciremos: «*Pensé un número, lo multipliqué por 2 y obtuve 12, ¿qué número pensé?*» Obviamente pensó el número 6. Entonces, $x = 6$.
- Para encontrar el valor de y podemos multiplicar por -1 cualquiera de las dos ecuaciones (elegimos multiplicar la segunda ecuación) y obtenemos un S.E.L. equivalente:

$$\begin{array}{rcl} \cancel{x} + \quad y &=& 10 \\ -\cancel{x} + \quad y &=& -2 \\ \hline 2y &=& 8 \end{array}$$

- En palabras, esta última ecuación nos dice: «*Pensé un número, lo multipliqué por 2 y obtuve 8, ¿qué número pensé?*» Sí, pensó el número 4. Entonces, $y = 4$.
- Y la solución del S.E.L., es: $x = 6$, $y = 4$.
- Se te queda como ejercicio verificar que la solución es correcta.

Esta solución no debe causar sorpresa alguna, dado que ya la conocíamos, pues resolvimos este mismo sistema por el método gráfico.

Sin embargo, no todos los S.E.L. que encontraremos podrán resolverse simplemente sumando las ecuaciones. Algunas veces necesitaremos encontrar algún factor que nos ayude con los coeficientes de una variable para que sean iguales y con signo contrario.

Resuelve:

$$\begin{aligned} x + \quad y &= 6 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

- Primero observamos que los coeficientes de la variable y tienen signos cambiados.
- Podemos empezar buscando un número que multiplicado por una ecuación iguale al coeficiente de la otra ecuación.
- Vamos a multiplicar la primera ecuación por 2 para obtener:

$$2x + 2y = 12$$

- Ahora hemos transformado nuestro problema inicial a otro problema equivalente que sí sabemos como resolver, porque el ejemplo anterior representó uno de estos casos:
- Cuando sumamos las ecuaciones una de las variables se «*eliminó*»:

$$\begin{array}{rcl} 2x + \cancel{2y} &=& 12 \\ x - \cancel{2y} &=& 0 \\ \hline 3x \quad &=& 12 \end{array}$$

- Y la última ecuación implica: $x = 4$.
- Para encontrar el valor de y podemos multiplicar la segunda ecuación por -1, así cambiamos el signo del coeficiente de x de esta ecuación:

$$\begin{array}{rcl} \cancel{x} + \quad y &=& 6 \\ -\cancel{x} + 2y &=& 0 \\ \hline 3y &=& 6 \end{array}$$

- Que implica: $y = 2$.
- Por tanto, la solución del S.E.L. es: $x = 4, y = 2$.
- Ahora verificamos que la solución es correcta:

$$\begin{array}{rcl} x + \quad y = 6 & \Rightarrow & 4 + \quad 2 = 6 \\ x - 2y = 0 & \Rightarrow & 4 - 2(2) = 0 \end{array}$$

En otros casos, tendremos los coeficientes de todas las variables con el mismo signo, como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3

Resuelve:

$$\begin{array}{rcl} x + \quad y &=& 6 \\ x + 2y &=& 0 \end{array}$$

- En este caso primer multiplicamos por -1 cualquiera de las dos ecuaciones: así tenemos los coeficientes de la variable x iguales con signo contrario:

$$\begin{array}{rcl} -\cancel{x} - \quad y &=& -6 \\ \cancel{x} + 2y &=& 0 \\ \hline y &=& -6 \end{array}$$

- Para encontrar el valor de x necesitamos «*eliminar*» la variable y.

- Vamos a multiplicar la primera ecuación por -2, así los coeficientes de esta variable son iguales y de signo cambiado:

$$\begin{array}{rcr} -2x - 2y & = & -12 \\ x + 2y & = & 0 \\ \hline -x \quad\quad & = & -12 \end{array}$$

- Multiplicando por -1 ambos lados de la última igualdad obtenemos: $x = 12$.
- La solución de este S.E.L. es: $x = 12$, $y = -6$
- Ahora comprobamos la solución:

$$\begin{array}{rcl} x + y = 6 & \Rightarrow & 12 - 6 = 6 \\ x + 2y = 0 & \Rightarrow & 12 - 2(6) = 0 \end{array}$$

Y en otros casos se requerirá multiplicar ambas ecuaciones para poder «*eliminar*» una de las variables.

Ejemplo 4

Resuelve:

$$\begin{array}{l} 3x + 2y = 13 \\ 2x + 3y = 12 \end{array}$$

- En este caso, la única posibilidad de resolver este problema[1] es multiplicar la primera ecuación por 2 y la segunda ecuación por 3.
- Así obtenemos en los coeficientes de la variable x del S.E.L. equivalente 6 en ambas ecuaciones.
- Solamente quedará pendiente quién será la que tenga coeficiente negativo.
- Elegimos multiplicar por -2 la primera ecuación y por 3 la segunda:

$$\begin{array}{rcr} -\cancel{6x} - 4y & = & -26 \\ \cancel{6x} + 9y & = & 36 \\ \hline 13y & = & 26 \end{array}$$

- Dividiendo ambos lados de la última igualdad entre 13, obtenemos el valor de la variable y

$$\frac{\cancel{13}y}{\cancel{13}} = \frac{26}{13} \qquad \Rightarrow \qquad y = 2$$

- Ahora vamos a «*eliminar*» la variable y para encontrar el valor de x
- Para esto, multiplicamos la primera ecuación por 3 y la segunda por -2:

$$\begin{array}{rcr} 9x + \cancel{6y} & = & 39 \\ -4x - \cancel{6y} & = & -24 \\ \hline 5x \quad\quad & = & 15 \end{array}$$

- De la última igualdad inmediatamente obtenemos: $x = 3$
- La solución es: $x = 3$, $y = 2$

[1] Podemos resolverlo también multiplicando por alguna fracción una de las ecuaciones, pero este método involucra operaciones con fracciones y no es el más sencillo.

- Ahora verificamos que la solución sea correcta:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 13 \quad && \Rightarrow 3(3) + 2(2) = 13 \\ 2x + 3y &= 12 \quad && \Rightarrow 2(3) + 3(2) = 12 \end{aligned}$$

Ejemplo 5

Resuelve:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 0 \\ 4x + 3y &= 1 \end{aligned}$$

- Ahora vamos a tener que multiplicar ambas ecuaciones por coeficientes que igualen los coeficientes de la variable que deseemos «*eliminar*».
- Para empezar vamos a eliminar la variable y, para así encontrar el valor de x.
- Así que vamos a multiplicar la primera ecuación por -3 y la segunda por 2:

$$\begin{array}{r} -9x - \cancel{6y} = 0 \\ 8x + \cancel{6y} = 2 \\ \hline -x \qquad\quad = 2 \end{array}$$

- Entonces, $x = -2$
- Para encontrar el valor de y debemos eliminar la otra variable (x).
- Ahora vamos a multiplicar la primera ecuación por -4 y a la segunda por 3:

$$\begin{array}{r} -\cancel{12x} - 8y = 0 \\ \cancel{12x} + 9y = 3 \\ \hline y = 3 \end{array}$$

- Y la solución del S.E.L. es: $x = -2$, $y = 3$.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 0 \quad && \Rightarrow 3(-2) + 2(3) = 0 \\ 4x + 3y &= 1 \quad && \Rightarrow 4(-2) + 3(3) = 1 \end{aligned}$$

Recuerda que no todos los sistemas de ecuaciones lineales tienen solución.

Cuando tengas un S.E.L. sin solución, este método puede causar que te confundas. El siguiente es uno de esos ejemplos, para que sepas qué hacer en esos casos.

Ejemplo 6

Resuelve:

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 4x + 4y &= 10 \end{aligned}$$

- Empezamos observando que si multiplicamos por -4 la primera ecuación podemos «*eliminar*» x de ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{r} -\cancel{4x} - \cancel{4y} = -8 \\ \cancel{4x} + \cancel{4y} = 10 \\ \hline 0 = 2 \end{array} \qquad \text{(Falso)}$$

- Pero esto **no** tiene sentido, porque $0 \neq 2$.
- Y es que en realidad no tiene sentido buscar el punto donde se intersectan dos rectas que son paralelas y que no son la misma recta.
- En conclusión, el S.E.L. **no** tiene solución.

Sin embargo, existe otro caso: el S.E.L. con un número infinito de soluciones.

Resuelve:

$$\begin{aligned} x + \quad y &= 2 \\ 4x + 4y &= 8 \end{aligned}$$

Ejemplo 7

- En este caso solamente ha cambiado el número 10 que estaba a la derecha de la segunda igualdad por un 8.
- Si aplicamos el mismo procedimiento que usamos en el ejemplo anterior obtenemos:

$$\begin{array}{r} -\cancel{4x} - \cancel{4y} = -8 \\ \cancel{4x} + \cancel{4y} = \quad 8 \\ \hline 0 = \quad 0 \end{array} \qquad \text{(Cierto)}$$

- Y la última igualdad es verdadera.
- Lo que pasa en este caso es que una ecuación es múltiplo de la otra, es decir, ambas ecuaciones son equivalentes.
- En efecto, si multiplicamos la primera ecuación por 4, obtenemos la segunda ecuación.
- En el ejemplo anterior, cuando el S.E.L. no tenía soluciones, al multiplicar por 4 la primera ecuación obtenemos una ecuación que era igual en los coeficientes de las variables, pero en el lado derecho de la igualdad los valores eran distintos.
- Las ecuaciones en ese caso, a pesar de que sus gráficas son rectas paralelas, **no** son equivalentes, por eso obtenemos la igualdad de dos cosas distintas.
- En el caso de un S.E.L. con un número infinito de soluciones, dado que ambas ecuaciones son equivalentes, si un punto satisface a una de las ecuaciones, debe satisfacer a la otra también, porque, por ser equivalentes, deben tener el mismo conjunto de puntos por solución.
- En ambos casos hablamos de rectas paralelas.

Nota que un S.E.L. puede:

A. No tener solución, es decir, tener cero soluciones, o

B. Tener una única solución, es decir, tener exactamente una solución, o

C. Tener un número infinito de soluciones, es decir, muchos puntos que satisfacen a ambas ecuaciones, simplemente porque al graficar las ecuaciones obtenemos la misma recta.

Es importante que entiendas que **no** es que la solución del S.E.L. sea infinito. Recuerda que la solución de un S.E.L. consiste en el *conjunto de valores* que debemos dar a las variables para que las ecuaciones se reduzcan a igualdades verdaderas.

Infinito **no** es un *conjunto de valores*. Es simplemente una expresión que nos indica que algo no tiene fin.

En este último caso tenemos un número infinito de soluciones. Cada una de esas soluciones debe especificar dos valores, uno para cada variable.

Si un punto satisface una de las ecuaciones, también va a satisfacer a la otra ecuación, si es que el S.E.L. tiene un número infinito de soluciones.

En este caso, las soluciones pueden encontrarse usando cualquiera de las ecuaciones. Por ejemplo, podemos tomar la primera ecuación: $x+y=2$, y reescribirla como: $y=2-x$.

A partir de esta ecuación, si conocemos el valor de x, podemos encontrar el valor que le corresponde a y para que satisfaga la ecuación. En otras palabras, hemos escrito la ecuación en forma de una función: damos el valor de x a la función, y ésta nos devuelve un valor, que corresponde a y para que satisfaga a la ecuación: $x+y=2$.

Ejemplo 8 Un bote recorre 1.8 kilómetros río arriba en 9 minutos. De regreso el bote requiere de 6 minutos solamente. ¿Cuál es la velocidad de la corriente del río?

- En el recorrido de regreso (río abajo), la corriente del río le ayuda a avanzar más rápido, por eso tarda menos.
- Para resolver este problema debemos recordar que para encontrar la velocidad promedio dividimos la distancia recorrida entre el tiempo que requirió.
- La velocidad promedio en la ida (río arriba) es igual a la distancia (1.8 km) entre el tiempo (9 min):

$$v_{\text{ida}}=\frac{1\,800\text{ m}}{9\text{ min}}=200\frac{\text{m}}{\text{min}}$$

- Y esta velocidad es igual a la velocidad del bote en aguas tranquilas menos la velocidad de la corriente.
- Vamos a denotar por b la velocidad del bote en aguas tranquilas, y
- r la velocidad de la corriente del río.
- Entonces,

$$b-r=200$$

- Esta es nuestra primera ecuación.
- La otra ecuación contendrá la información del regreso:
- Podemos encontrar la velocidad a la que viajó río abajo dividiendo la distancia entre el tiempo:

$$v_{\text{reg}}=\frac{1\,800\text{ m}}{6\text{ min}}=300\frac{\text{m}}{\text{minuto}}$$

- Y esta velocidad es igual a la velocidad del bote más la velocidad de la corriente del río:

$$b+r=300$$

- Ahora debemos resolver este S.E.L.:

$$\begin{aligned} b-r&=200\\ b+r&=300 \end{aligned}$$

- Para empezar sumamos las dos ecuaciones:

$$\begin{array}{rl} b - \cancel{r} & = 200 \\ b + \cancel{r} & = 300 \\ \hline 2b \quad & = 500 \end{array}$$

- Esto indica que: $b = 250$ metros/minuto.
- Para encontrar r podemos eliminar la otra variable multiplicando la segunda ecuación por -1:

$$\begin{array}{rrl} -\cancel{b}+ & r = & -200 \\ \cancel{b}+ & r = & 300 \\ \hline & 2r = & 100 \end{array}$$

- Es decir, $r = 50$ metros/minuto.
- Verificamos que se cumplen las condiciones del problema.
- Río arriba la corriente hacia parecer que el bote viajaba a $250 - 50 = 200$ metros/minuto.
- Para recorrer 1 800 metros requiere 9 minutos, ya que viaja 200 metros cada minuto.
- Río abajo, la corriente hacia parecer que el bote viajaba a $250 + 50 = 300$ metros/minuto.
- Para recorrer 1 800 metros de regreso se necesitan 6 minutos a esa velocidad.

3.2.2 Método de Sustitución

El nombre de este método nos indica qué es lo que vamos a hacer: para resolver el S.E.L. de dos ecuaciones con dos incógnitas vamos a «*despejar*» una de las incógnitas de una de las ecuaciones, vamos a sustituir este despeje en la otra ecuación y así tenemos un problema de una ecuación lineal con una incógnita. Después resolvemos esta ecuación lineal y encontramos el valor de una de las variables.

Para encontrar el otro valor podemos sustituir el valor de la variable conocida en el despeje que hicimos antes y terminamos.

El siguiente ejemplo te muestra el procedimiento.

Ejemplo 1

Resuelve:

$$\begin{aligned} x + y &= 10 \\ x - y &= \ \ 2 \end{aligned}$$

- Este ejemplo es el primero que estudiamos con el método de eliminación, así que ya conocemos la solución de este sistema: $x = 6, y = 4$.
- Primero vamos a despejar una variable de alguna de las ecuaciones.
- Vamos a despejar y de la primera ecuación.
- Para esto, sumamos en ambos lados de la primera ecuación $-x$, y así obtenemos:

$$\begin{aligned} -\cancel{x} + \cancel{x} + y &= 10 - x \\ y &= 10 - x \end{aligned}$$

- Ahora utilizamos este despeje para sustituirlo en la otra ecuación.
- La sustitución es válida en este procedimiento porque si $y = 10 - x$, entonces, los valores de x y de y satisfacen a la primera ecuación.
- Pero también deben satisfacer a la otra ecuación, por eso sustituimos ese valor de y, pues en ambas ecuaciones debe ser el mismo.
- Aquí está la sustitución:

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ x - (10 - x) &= 2 \end{aligned}$$

- Observa que ahora tenemos solamente una ecuación con una sola incógnita.
- Obtuvimos esto porque la condición que impone la primera ecuación ya está incluida en esta nueva ecuación lineal.
- Y esto se incluyó cuando sustituimos el despeje que obtuvimos de ella.
- Ahora debemos realizar las operaciones indicadas y resolver para encontrar el valor de la única variable que se encuentra en la ecuación:

$$\begin{aligned} x - 10 + x &= 2 \\ 2x - 10 + 10 &= 2 + 10 \\ 2x &= 12 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

- Vemos que el valor de x es el que ya conocíamos.
- Ahora vamos a calcular el valor de y. Para esto sustituimos el valor de x que acabamos de encontrar en el despeje que hicimos antes:

$$\begin{aligned} y &= 10 - x \\ &= 10 - 6 \\ &= 4 \end{aligned}$$

- Y de nuevo, el valor que encontramos coincide con el resultado correcto.

Para decidir qué variable despejar y de qué ecuación, es una buena idea identificar la variable que tenga coeficiente igual a uno en una de las ecuaciones. Esto te facilitará los cálculos posteriores.

Ejemplo 2

Resuelve:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 18 \\ 3x - 4y &= 5 \end{aligned}$$

- Primero observamos que la variable y en la primera ecuación tiene coeficiente igual a uno.
- Por eso, vamos a despejar esa variable de esa ecuación:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 18 \\ y &= 18 - 2x \end{aligned}$$

- Ahora sustituimos este despeje en la otra ecuación:

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 5 \\ 3x - 4(18-2x) &= 5 \end{aligned}$$

- Ahora vamos a realizar las operaciones indicadas para a encontrar el valor de la única variable en esta ecuación: x

$$\begin{aligned} 3x - 4(18-2x) &= 5 \\ 3x - 72 + 8x &= 5 \\ 11x - \cancel{72} + \cancel{72} &= 5 + 72 \\ 11x &= 77 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

- Ahora que conocemos el valor de una variable, podemos utilizar este valor para encontrar el valor de la otra variable.

- Para esto, sustituimos en el despeje que hicimos al principio:

$$\begin{aligned} y &= 18 - 2x \\ &= 18 - 2(7) \\ &= 18 - 14 \\ &= 4 \end{aligned}$$

- Entonces, la solución de este S.E.L. es: $x = 7, y = 4$.

- Ahora vamos a comprobar que la solución que encontramos es correcta:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 18 & \Rightarrow 2(7) + 4 &= 18 \\ 3x - 4y &= 5 & \Rightarrow 3(7) - 4(4) &= 5 \end{aligned}$$

Una vez que hayamos encontrado el valor de una de las variables, también podemos encontrar el valor de la otra variable sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones que forman en S.E.L.

Esto se justifica porque la solución debe satisfacer a cada una de las ecuaciones que forman el S.E.L.

Resuelve:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \\ 2x + 3y &= 8 \end{aligned}$$

Ejemplo 3

- Podemos ver que ninguno de los coeficientes de las variables es igual a 1.

- Esto nos indica que debemos despejar alguna variable y tendremos que trabajar necesariamente con fracciones.

- Elegimos despejar x de la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 2x &= 8 - 3y \\ x &= \frac{8 - 3y}{2} \\ &= \frac{8}{2} - \frac{3y}{2} = 4 - \frac{3y}{2} \end{aligned}$$

- Ahora debemos sustituir este despeje en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \\ 3\cdot\left(4 - \frac{3y}{2}\right) + 2y &= 7 \end{aligned}$$

- Ahora podemos resolver la ecuación y tratar de encontrar el valor de y:

$$12 - \frac{9y}{2} + 2y = 7$$
$$12 - \frac{9y}{2} + \frac{4y}{2} = 7$$
$$12 - \frac{5y}{2} = 7$$
$$\begin{aligned} 12 - 7 &= \frac{5y}{2} \\ 5 &= \frac{5y}{2} \\ \frac{5(2)}{5} &= y \\ 2 &= y \end{aligned}$$

- Ahora que conocemos el valor de y, podemos sustituir este valor en cualquiera de las dos ecuaciones y encontrar el valor de x:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \\ 3x + 2(2) &= 7 \\ 3x + 4 &= 7 \\ 3x &= 7 - 4 = 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

- Y la solución del S.E.L. es: $x = 1$, $y = 2$.

- Ahora verificamos que la solución sea correcta:

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 7 \qquad \Rightarrow 3(1) + 2(2) = 7 \\ 2x + 3y &= 8 \qquad \Rightarrow 2(1) + 3(2) = 8 \end{aligned}$$

Como viste en el ejemplo anterior, algunas veces, cuando usemos este método, necesariamente tendremos que trabajar con fracciones.

Otras veces, podremos simplificar el trabajo cuando tengamos una ecuación con una variable despejada.

Ejemplo 4

Resuelve:

$$\begin{aligned} x + \quad y &= 8 \\ y &= 2x - 1 \end{aligned}$$

- Como en la segunda ecuación la variable y ya está despejada, vamos a sustituirla de inmediato en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} x+y &= 8 \\ x+(2x-1) &= 8 \\ 3x-1 &= 8 \\ 3x &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

- Ahora, a partir del valor de x, podemos encontrar el valor de y utilizando el despeje:

$$\begin{aligned} y &= 2x-1 \\ &= 2(3)-1 \\ &= 6-1 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

- Entonces, la solución del S.E.L. es: $x=3$, $y=5$.
- Ahora comprobamos que la solución esté correcta:

$$\begin{array}{lcl} x+y=8 & \Rightarrow & 3+5=8 \\ y=2x-1 & \Rightarrow & 5=2(3)-1 \end{array}$$

En algunos casos aplicados, una ecuación tendrá despejada una variable, sugiriendo el empleo de este método para resolver el S.E.L.

Alberto es 2 años mayor que Blanca. Si sus edades suman 32 años, ¿qué edad tiene cada uno? **Ejemplo 5**

- Primero tenemos que convenir en los símbolos que denotarán las edades de cada uno.
- Por comodidad, podemos elegir como A la edad que tiene Alberto y B la edad que tiene Blanca.
- Ahora vamos a traducir a una ecuación la primera información que se nos da: «*Alberto es 2 años mayor que Blanca.*»
- Si Blanca tiene, por ejemplo, 5 años, entonces, Alberto tendrá $5+2=7$ años.
- Es decir, para encontrar la edad de Alberto, sumamos dos a la edad de Blanca.
- La ecuación que modela esa restricción impuesta en el problema es:

$$A=B+2$$

- Ahora vamos con la segunda restricción: «*Sus edades suman 32 años...*»
- Esta restricción es muy sencilla de traducir: dado que A representa la edad de Alberto y B representa la edad de Blanca, la suma: $A+B$ debe ser igual a 32:

$$A+B=32$$

- Ahora tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas, con la primera ecuación ya despejada.

- Así que sustituimos esta primera ecuación en la segunda y resolvemos:

$$\begin{aligned} A+B &= 32\\ (B+2)+B &= 32\\ 2\,B+2 &= 32\\ 2\,B &= 30\\ B &= 15 \end{aligned}$$

- Hasta aquí sabemos que Blanca tiene 15 años.
- Entonces, como Alberto tiene 2 años más, debe tener 17.
- Y se cumple que la suma de sus edades es 32 años: $17+15=32$.

Observa cómo cuando resolvimos el S.E.L. podemos fácilmente traducir la penúltima ecuación ($2\,B=30$) como: «*Pensé un número, lo multipliqué por 2 y obtuve 30. ¿Qué número pensé?*» Obviamente, pensó el 15.

La ecuación anterior ($2\,B+2=32$) se traduce así: «*Cuando al número* $2\,B$ *le sumo 2 obtengo 32. ¿Cuánto vale el número* $2\,B$*?*», pues vale $32-2=30$.

Es una buena idea traducir a palabras cada ecuación que sepas cómo traducir. Eso te ayudará a entenderlas mejor cada vez.

Ejemplo 6

La familia Álvarez viaja de Acaxochitlan hacia Bacaxochitlan a una velocidad de 91 km/hr. La familia Blanco viaja de Bacaxochitlan hacia Acaxochitlan a una velocidad constante de 65 km/hr. Si ambos inician su viaje exactamente a la misma hora, ¿cuántas horas tardarán en encontrarse si la distancia entre ambas poblaciones es de 455 kilómetros y utilizan la misma ruta para viajar?

- Para resolver este problema suponemos que las dos familias utilizan la misma ruta para ir de una población a la otra.
- Como ambos inician el recorrido al mismo tiempo, ambos han utilizado la misma cantidad de tiempo para la hora en que se encuentran.
- Si denotamos como A al tiempo que lleva de recorrido la familia Álvarez, y B la cantidad de tiempo que ha recorrido la familia Blanco, tenemos que:

$$A=B$$

- La familia Álvarez viaja a una velocidad constante de 91 km/hr.
- Esto significa que en A horas ha recorrido: $(91\cdot A)$ kilómetros.
- Por su parte la familia B viaja a 65 km/hr.
- Por lo que ha recorrido $(65\cdot B)$ kilómetros en B horas.
- Cuando ellos se encuentren en el camino, la suma de las distancias que han recorrido será igual a la distancia entre Acaxochitlan y Bacaxohitlan.

$$91\,A+65\,B=455$$

- Pero ya sabíamos que $A = B$, por lo que:

$$\begin{aligned}
91\,A + 65\,B &= 455\\
91\,A + 65\,A &= 455\\
156\,A &= 455\\
A &= \frac{455}{156} = \frac{35}{12} = 2 + \frac{11}{12} = 2 + \frac{55}{60}
\end{aligned}$$

- Esto es, 2 horas con 55 minutos.
- Vamos a verificar el resultado, para esto utilizamos la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
91\left(\frac{35}{12}\right) + 65\left(\frac{35}{12}\right) &= 455\\
\frac{3\,185}{12} + \frac{2\,275}{12} &= \frac{6\,090}{12} = 455
\end{aligned}$$

3.2.3 Método de Igualación

Ya vimos que la solución del S.E.L. debe ser tal que cuando sustituyamos los valores de las variables en cada ecuación obtengamos una igualdad verdadera.

Entonces, el valor de x que obtengamos en una ecuación debe ser el mismo para la otra ecuación. De manera semejante, el valor de y en cada una de las ecuaciones, debe ser el mismo.

Este argumento nos ayuda porque podemos igualar el valor de una variable despejando ésta de ambas incógnitas.

El método de igualación, como su nombre lo indica, consiste en igualar el despeje de una misma variable en distintas ecuaciones y así tener una sola ecuación sin la variable que estamos igualando.

Ejemplo 1

Resuelve:

$$\begin{aligned}
x - y &= 2\\
x + 2y &= 11
\end{aligned}$$

- Como dijimos, vamos a despejar la misma variable de cada una de las ecuaciones del S.E.L.:

$$\begin{aligned}
x - y = 2 \qquad &\Rightarrow \qquad x = 2 + y\\
x + 2y = 11 \qquad &\Rightarrow \qquad x = 11 - 2y
\end{aligned}$$

- Pero ya sabemos que el valor de x en la primera ecuación debe ser el mismo que en la segunda ecuación.
- Esto nos permite igualar los dos despejes:

$$\begin{aligned}
x = 2 + y &= 11 - 2y\\
y + 2y &= 11 - 2\\
3y &= 9\\
y &= 3
\end{aligned}$$

- Ahora observa el despeje:

$$x = 2 + y$$

- En palabras el primer despeje dice: «*El valor de x es mayor al valor de y en dos unidades.*»

- Pero $y = 3$, entonces, $x = 2 + 3 = 5$, porque

$$\begin{aligned} x &= 2 + y \\ 5 &= 2 + 3 \end{aligned}$$

- Con lo que la solución del S.E.L. es: $x = 5$, $y = 3$.

- Vamos a verificar el resultado:

$$\begin{aligned} x - y &= 2 \qquad \Rightarrow 5 - 3 = 2 \\ x + 2y &= 11 \qquad \Rightarrow 5 + 2(3) = 11 \end{aligned}$$

Los despejes en este como en los métodos que ya estudiamos, siempre resultan sencillos.

Algunas veces tendremos que dividir por algún número.

Ejemplo 2

Resuelve:

$$\begin{aligned} 5x - 2y &= 1 \\ 2x + 3y &= 27 \end{aligned}$$

- Ya sabemos que debemos despejar la misma incógnita de ambas ecuaciones.

- En este caso, todos los coeficientes de las variables son distintos de 1, por eso, no importa cuál despejemos.

- Así que elegimos despejar y.

- Despejamos y de la primera ecuación:

$$\begin{aligned} 5x - 2y &= 1 \\ 5x - 1 &= 2y \\ \frac{5x - 1}{2} &= y \end{aligned}$$

- Ahora despejamos y de la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 27 \\ 3y &= 27 - 2x \\ y &= \frac{27 - 2x}{3} \end{aligned}$$

- Ahora igualamos los despejes y resolvemos la ecuación resultante:

$$\begin{aligned} y = \frac{5x - 1}{2} &= \frac{27 - 2x}{3} \\ \frac{5x - 1}{2} &= \frac{27 - 2x}{3} \end{aligned}$$

- Pero primero observa que podemos multiplicar ambos lados de la ecuación por 6 y los denominadores desaparecen de la ecuación, simplificando la ecuación:[2]

$$
\begin{aligned}
\frac{\cancelto{3}{6}\cdot(5x-1)}{\cancel{2}} &= \frac{\cancelto{2}{6}\cdot(27-2x)}{\cancel{3}}\\
3\cdot(5x-1) &= 2\cdot(27-2x)\\
15x-3 &= 54-4x\\
15x+4x &= 54+3\\
19x &= 57\\
x &= \frac{57}{19}=3
\end{aligned}
$$

- Ahora podemos sustituir este valor en cualquiera de los despejes y encontrar el valor de y:

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{5x-1}{2}\\
&= \frac{5(3)-1}{2}\\
&= \frac{15-1}{2}\\
&= \frac{14}{2}\\
y &= 7
\end{aligned}
$$

- Entonces, la solución del S.E.L. es: $x=3$, $y=7$.
- Vamos a verificar que la solución esté correcta:

$$
\begin{array}{rcl}
5x-2y=\ \ 1 & \Rightarrow & 5(3)-2(7)=\ \ 1\\
2x+3y=27 & \Rightarrow & 2(3)+3(7)=27
\end{array}
$$

Resuelve:

$$
\begin{aligned}
3x+2y&=1\\
2x+3y&=9
\end{aligned}
$$

Ejemplo 3

- Empezamos despejando la misma incógnita de ambas ecuaciones.
- En este caso nos conviene despejar la variable que tenga coeficiente positivo en ambas ecuaciones.
- Por eso elegimos despejar la variable x.
- Aquí está el despeje para la primera ecuación:

$$
\begin{aligned}
3x+2y &= 1\\
3x &= 1-2y\\
x &= \frac{1-2y}{3}
\end{aligned}
$$

[2]Multiplicamos por 6, porque 6 es el mínimo común múltiplo de 2 y 3.

- Ahora la despejamos de la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 2x+3y &= 9 \\ 2x &= 9-3y \\ x &= \frac{9-3y}{2} \end{aligned}$$

- Nuestro siguiente paso consiste en igualar los despejes y resolver la ecuación resultante:

$$x = \frac{1-2y}{3} = \frac{9-3y}{2}$$

- Para simplificar la ecuación, empezamos multiplicando ambos lados por el mínimo común múltiplo de 2 y 3, es decir, por 6:

$$\begin{aligned} \overset{2}{\cancel{6}}\left(\frac{1-2y}{\cancel{3}}\right) &= \overset{3}{\cancel{6}}\left(\frac{9-3y}{\cancel{2}}\right) \\ 2(1-2y) &= 3(9-3y) \\ 2-4y &= 27-9y \\ -4y+9y &= 27-2 \\ 5y &= 25 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

- Ahora podemos encontrar el valor de x a partir de un despeje y el valor de y, que acabamos de encontrar:

$$\begin{aligned} x &= \frac{9-3y}{2} \\ &= \frac{9-3(5)}{2} \\ &= \frac{9-15}{2} \\ x &= \frac{-6}{2} = -3 \end{aligned}$$

- La solución del S.E.L. es: $x=-3$, $y=5$.
- Ahora verificamos que el resultado sea correcto:

$$\begin{aligned} 3x+2y=1 \quad &\Rightarrow 3(-3)+2(5)=1 \\ 2x+3y=9 \quad &\Rightarrow 2(-3)+3(5)=9 \end{aligned}$$

Ejemplo 4

En las pasadas elecciones del pueblo, el candidato del partido X obtuvo 12 357 votos más que el candidato del partido Y. Entre los dos obtuvieron 45 225 votos. ¿Cuántos votos obtuvo cada uno de ellos?

- Vamos a denotar por x al número de votos que obtuvo el candidato del partido X, y por y el número de votos que obtuvo el candidato del partido Y.

- De acuerdo a la información que se nos proporcionó, tenemos el siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned} x &= 12\,357 + y \\ x + y &= 45\,225 \end{aligned}$$

- Inmediatamente vemos que en la primera ecuación ya está despejada la variable x, así que vamos a despejar esa misma variable de la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} x + y &= 45\,225 \\ x &= 45\,225 - y \end{aligned}$$

- Ahora igualamos los despejes y resolvemos la ecuación resultante:

$$\begin{aligned} 12\,357 + y &= 45\,225 - y \\ y + y &= 45\,225 - 12\,357 \\ 2\,y &= 32\,868 \\ y &= 16\,434 \end{aligned}$$

- Ahora podemos encontrar el valor de x sustituyendo el valor de y que acabamos de encontrar en la otra ecuación:

$$\begin{aligned} x &= 12\,357 + y \\ x &= 12\,357 + 16\,434 \\ x &= 28\,791 \end{aligned}$$

- La solución es: $x = 28\,791$, $y = 16\,434$.
- Vamos a verificar que la solución esté correcta:
- De la información que nos dan en el texto del problema tenemos: «*el candidato del partido* X *obtuvo 12 357 votos más que el candidato del partido* Y»,
- Y ya sabemos que $y = 16\,434$, por lo que $x = 16\,434 + 12\,357 = 28\,791$.
- Además, «*Entre los dos obtuvieron 45 225 votos*», por lo que:

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = 45\,225 \\ 28\,791 & + & 16\,434 & = 45\,225 \end{array}$$

Ejemplo 5

Mauricio dijo que tenía $41.00 pesos en 10 monedas. Si él solamente tenía monedas de $5.00 y de $2.00 pesos, ¿cuántas monedas tenía de cada denominación?

- Ya vimos como resolver este tipo de problemas con una sola ecuación y una incógnita (Pag. 115), pero ahora vamos a resolverlo usando dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Empezamos definiendo como c la cantidad de monedas de $5.00 pesos y
- d la cantidad de monedas de $2.00 pesos que posee.
- Sabemos que tiene en total 10 monedas, entonces:

$$c + d = 10$$

- Y en total tiene \$41.00 pesos, entonces,

$$5c+2d=41$$

- Vamos a despejar de ambas ecuaciones la misma incógnita.
- Elegimos c.
- Hacemos el despeje de la primera ecuación:

$$\begin{aligned} c+d &= 10 \\ c &= 10-d \end{aligned}$$

- Ahora hacemos el despeje de la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} 5c+2d &= 41 \\ 5c &= 41-2d \\ c &= \frac{41-2d}{5} \end{aligned}$$

- Ahora igualamos los despejes y resolvemos la ecuación:

$$c=10-d=\frac{41-2d}{5}$$

- Para simplificar la fracción multiplicamos ambos lados de la igualdad por 5:

$$\begin{aligned} 5(10-d) &= \cancel{5}\left(\frac{41-2d}{\cancel{5}}\right) \\ 50-5d &= 41-2d \\ 50-41 &= -2d+5d \\ 9 &= 3d \\ 3 &= d \end{aligned}$$

- Es decir, tiene 3 monedas de \$2.00 pesos.
- Esto significa que tiene $10-3=7$ monedas de \$5.00 pesos.
- Vamos a verificar que la solución satisface las condiciones del problema:

$$\begin{aligned} c+d=10 &\quad\Rightarrow\quad 3+7=10 \\ 5c+2d=41 &\quad\Rightarrow\quad 5(7)+2(3)=41 \end{aligned}$$

Observa que en el ejemplo anterior se eligieron las literales de manera que sea fácil identificar de qué variable estamos hablando: c para las monedas de cinco pesos y d para las monedas de dos pesos.

Utilizar este principio siempre es muy buena idea, porque frecuentemente ocurre que muchos estudiantes resuelven correctamente el problema, pero a la hora de interpretar el resultado cometen el error de intercambiar las variables con sus significados.

Por ejemplo, si hubieran elegido x para las monedas de \$2.00 pesos, hubieran encontrado que $x=3$, pero después, por descuido, dirían que tienen en total 3 monedas de \$5.00 pesos.

Esto se puede evitar si buscas una literal que te ayude a identificar qué variable está representando.

Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= m \\ c\,x + d\,y &= \ n \end{aligned}$$

por el método de eliminación.

Sugerencia: Multiplica la primera ecuación por $-c$ y la segunda ecuación por a para poder eliminar la variable x y encontrar el valor de y. Para encontrar el valor de x elimina y multiplicando la primera ecuación por d y la segunda ecuación por $-b$.

Reto 1

3.2.4 Método de Determinantes

Este método es de los más inmediatos[3], además de que nos ayuda desde el principio a reconocer si un S.E.L. tiene solución única o no.

Para empezar definimos el concepto de determinante:

DETERMINANTE

Sean a,b,c,d números reales. El arreglo de números:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

se utiliza para denotar al determinante y su valor es igual a: $a\,d - b\,c$.

Definición 1

Entonces, por definición:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c$$

Una forma de memorizar el concepto de determinante y cómo calcularlo consiste en observar que multiplicamos las diagonales del arreglo de números, primero la que va de izquierda a derecha (que es la manera como leemos) y de arriba hacia abajo (que nos arroja el primer producto: $a\,d$), y después multiplicamos los otros dos números que no habíamos considerado: bc y restamos este producto del anterior.

En un S.E.L. podemos tener, por ejemplo:

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= m \\ c\,x + d\,y &= \ n \end{aligned}$$

el cual se puede escribir en forma matricial[4]:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & m \\ c & d & n \end{array}\right]$$

Para obtener la forma matricial de un S.E.L. basta escribir el mismo S.E.L. sin las variables. Es decir, escribimos solamente los coeficientes.

De aquí se definen 3 determinantes:

[3] Descubierto por Gabriel Cramer (1 704 – 1 752), matemático suizo. Hay evidencia de que esta regla fue usada anteriormente por el Matemático Inglés Colin Maclaurin (1 689 – 1 746). [?]

[4] En matemáticas, una matriz se define como un arreglo rectangular de números. El álgebra lineal es la rama de las matemáticas que estudia estos objetos matemáticos, así como los vectores.

✓ El **determinante principal**:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c$$

✓ El *determinante auxiliar en x*:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix} = m\,d - b\,n$$

✓ El *determinante auxiliar en y*:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix} = a\,n - m\,c$$

Para hacer más fácil las cosas, observa que en el determinante auxiliar de x hemos sustituido los coeficientes de la variable x por el lado derecho de las ecuaciones del S.E.L., y de manera semejante, para el determinante auxiliar de y se han sustituido los coeficientes de la variable y por los números m, n, y el determinante se ha calculado como se definió anteriormente.

A partir de los determinantes podemos encontrar la solución del S.E.L.:

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= m \\ c\,x + d\,y &= n \end{aligned}$$

En este caso:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Delta_x}{\Delta_p} = \frac{\begin{vmatrix} m & b \\ n & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{m\,d - b\,n}{a\,d - b\,c} \\ y &= \frac{\Delta_y}{\Delta_p} = \frac{\begin{vmatrix} a & m \\ c & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{a\,n - m\,c}{a\,d - b\,c} \end{aligned}$$

Para dar evidencia de que esto es verdad, vamos a volver a resolver el siguiente S.E.L.:

Ejemplo 1

Resuelve:

$$\begin{aligned} x + y &= 10 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

- Primero encontramos el determinante principal:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1) - (1)(1) = (-1) - (1) = -2$$

- Ahora calculamos el determinante auxiliar en x:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (10)(-1) - (1)(2) = (-10) - (2) = -12$$

- Y finalmente calculamos el determinante auxiliar en y:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (1)(2)-(10)(1) = (2)-(10) = -8$$

- Ahora podemos calcular la solución del S.E.L.:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Delta_x}{\Delta_p} = \frac{-12}{-2} = 6 \\ y &= \frac{\Delta_x}{\Delta_p} = \frac{-8}{-2} = 4 \end{aligned}$$

- Y ya sabemos que la solución es correcta[5].

Resuelve:

$$\begin{aligned} 2x + y &= 6 \\ x - 2y &= 8 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

- Calculamos primero el determinante principal:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (2)(-2)-(1)(1) = (-4)-(1) = -5$$

- Ahora calculamos el determinante auxiliar en x:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = (6)(-2)-(1)(8) = (-12)-(8) = -20$$

- Y finalmente calculamos el determinante auxiliar en y:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = (2)(8)-(6)(1) = (16)-(6) = 10$$

- Ahora podemos calcular la solución del S.E.L.:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Delta_x}{\Delta_p} = \frac{-20}{-5} = 4 \\ y &= \frac{\Delta_x}{\Delta_p} = \frac{-10}{-5} = -2 \end{aligned}$$

- Ahora vamos a verificar que la solución sea correcta:

$$\begin{aligned} 2x + y = 6 \quad &\Rightarrow \quad 2(4)+(-2) = 6 \\ x - 2y = 8 \quad &\Rightarrow \quad 4-2(-2) = 8 \end{aligned}$$

[5] Este S.E.L. ya se resolvió por varios métodos. Puedes ver la solución en las páginas **??** (método gráfico), **??** (eliminación) ó 139 (sustitución).

La ventaja de usar este método consiste en que si el determinante principal es igual a cero, entonces podemos concluir inmediatamente que el S.E.L. **no** tiene solución única. Es posible que no tenga solución, como es posible que tenga un número infinito de soluciones.

Ejemplo 3

Resuelve:

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 7 \\ 4x - 6y &= 0 \end{aligned}$$

- Para resolver este S.E.L.[6] vamos a calcular primero el determinante principal:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = (2)(-6) - (-3)(4) = (-12) - (-12) = 0$$

- Dado que $\Delta_p = 0$, no podremos encontrar los valores de las variables x e y, porque tendremos división por cero.
- De aquí se concluye que el S.E.L. **no** tiene solución única.
- Para saber si el S.E.L. tiene un número infinito de soluciones o no tiene solución, calculamos los otros dos determinantes auxiliares:
- Empezamos calculando el valor del determinante auxiliar de x:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = (7)(-6) - (-3)(0) = (-42) - (0) = -42$$

- Y ahora calcumamos el determinante auxiliar en y:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = (2)(0) - (7)(4) = (0) - (28) = -28$$

- En este caso tanto Δ_x como Δ_y son distintos de cero, indicando que el S.E.L. **no** tiene solución.
- ¿Por qué? Observa que si multiplicamos la primera ecuación del S.E.L. por 2 obtenemos:

$$2x - 3y = 7 \qquad \Rightarrow \qquad 4x - 6y = 14$$

- Y al compararla con la segunda ecuación del S.E.L. podemos concluir que se trata de un S.E.L. formado por dos rectas paralelas distintas.
- En caso de que los determinantes auxiliares hubieran resultado ser iguales a cero, tendríamos que las dos ecuaciones que forman el S.E.L. serían la misma recta, y el S.E.L. tendría en ese caso un número infinito de soluciones.
- Entonces, este S.E.L. **no** tiene solución.

Ejemplo 4

En la oficina municipal utilizan dos fotocopiadoras para preparar invitaciones para el día de las madres. La máquina Y produce 600 fotocopias más por hora que la máquina X. Cuando trabajan juntas producen 19 800 fotocopias en 3 horas. ¿Cuál es la velocidad de fotocopiado de cada máquina?

[6] Este S.E.L. fue tomado de la fuente: [**?**] indicada en la bibliografía.

- Sabemos que la máquina Y produce 600 fotocopias más por hora que la máquina X.
- Es decir, si x es la velocidad de fotocopiado de la máquina X y y es la velocidad de fotocopiado de la máquina Y, tenemos que:

$$y = x + 600 \qquad \Rightarrow \qquad -x + y = 600$$

- Por otra parte, sabemos que en 3 horas las dos máquinas trabajando juntas producen 19 800 fotocopias:

$$3x + 3y = 19\,800$$

- Entonces, el S.E.L. que modela nuestro problema es:

$$\begin{aligned} -x + y &= 600 \\ 3x + 3y &= 19\,800 \end{aligned}$$

- Primero lo escribimos en forma matricial:

$$\left[\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 600 \\ 3 & 3 & 19\,800 \end{array}\right]$$

- Ahora es más fácil encontrar los determinantes:

$$\Delta_p = \left| \begin{array}{rr} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{array} \right| = (-1)(3) - (1)(3) = (-3) - (3) = -6$$

- Dado que $\Delta_p \neq 0$ sabemos que el S.E.L. tiene solución única.
- Ahora encontramos el determinante auxiliar en x:

$$\Delta_x = \left| \begin{array}{rr} 600 & 1 \\ 19800 & 3 \end{array} \right| = (600)(3) - (1)(19800) = (1800) - (19800) = -18000$$

- Y el determinante auxiliar en y:

$$\Delta_y = \left| \begin{array}{rr} -1 & 600 \\ 3 & 19800 \end{array} \right| = (-1)(19800) - (600)(3) = (-19800) - (1800) = -21600$$

- Y la solución de este S.E.L. es:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Delta_x}{\Delta_p} = \frac{-18\,000}{-6} = 3\,000 \\ y &= \frac{\Delta_x}{\Delta_p} = \frac{-21\,600}{-6} = 3\,600 \end{aligned}$$

- Ahora comprobamos que la solución esté correcta:
- Es evidente que la solución satisface la primera ecuación:

$$y = x + 600 \qquad \Rightarrow \qquad 3\,600 = 3\,000 + 600$$

- Ahora verificamos que satisfaga la segunda ecuación:

$$3x + 3y = 19\,800 \qquad \Rightarrow \qquad 3(3\,000) + 3(3\,600) = 19\,800$$

- Con lo que probamos que la velocidad de la fotocopiadora X es de 3 000 fotocopias por hora y la fotocopiadora Y tiene una velocidad de 3 600 fotocopias por hora.

Ejemplo 5 En la biblioteca de una primaria encontraron que hay 3 libros de química más que de física y la suma de esos libros es 27. ¿Cuántos libros de cada una de esas materias hay?

- Vamos a denotar al número de física con la letra f y los de química por q.
- Sabemos que si a los libros de física le sumamos 3, obtenemos el número de libros de química:
$$q = f + 3 \qquad \Rightarrow \qquad -f + q = 3$$
- Por otra parte, sabemos que sumamdos los libros de física y los de química en total son 27:
$$f + q = 27$$
- Nuestro S.E.L. es:
$$\begin{aligned} -f + q &= 3 \\ f + q &= 27 \end{aligned}$$
- Es evidente que este S.E.L. se puede resolver rápidamente por el método de eliminación, pero vamos a probar la solución por el método de determinantes.
- Ahora escribimos el S.E.L. en su forma matricial:
$$\left[\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 27 \end{array}\right]$$
- Para resolver este S.E.L., empezamos calculamos los determinantes:
$$\begin{aligned} \Delta_p &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1) - (1)(1) = (-1) - (1) = -2 \\ \Delta_f &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 27 & 1 \end{vmatrix} = (3)(1) - (1)(27) = (3) - (27) = -24 \\ \Delta_q &= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 27 \end{vmatrix} = (-1)(27) - (3)(1) = (-27) - (3) = -30 \end{aligned}$$
- Entonces, la solución de este problema es:
$$\begin{aligned} f &= \frac{\Delta_f}{\Delta_p} = \frac{-24}{-2} = 12 \\ q &= \frac{\Delta_q}{\Delta_p} = \frac{-30}{-2} = 15 \end{aligned}$$
- Ahora vamos a verificar que esta solución satisface las condiciones del problema:
  - ✓ La primera condición: «*...hay 3 libros de química más que de física*», se cumple: $15 = 12 + 3$
  - ✓ La segunda condición: «*...la suma de esos libros es 27*», también se cumple: $12 + 15 = 27$

Cuando encuentres un S.E.L., primero observa qué método de solución te ayuda a resolverlo con el mínimo esfuerzo.

Una buena idea consiste en calcular primero el determinante principal del S.E.L., porque esta información te dirá si tiene solución única (en caso de que $\Delta_p \neq 0$).

3.2.5 Interpretación gráfica

En la introducción de la sección *Sistemas de Ecuaciones Lineales* se presentó la interpretación gráfica (o geométrica) de la solución de un S.E.L..

Este tema está relacionado con la *Interpretación Gráfica de las Funciones Lineales*, donde se estudia el concepto de función.

Una ecuación lineal con dos variables puede escribirse en forma de una función. Por ejemplo, consideremos:

$$a\,x + b\,y = k$$

Podemos fácilmente despejar la variable y y reescribir la ecuación en forma de una función:

$$y = \frac{k - a\,x}{b}$$

Esta función nos ayuda a calcular un valor de y una vez que nosotros conozcamos un valor de x.

Entonces, para graficar la ecuación $a\,x + b\,y = k$ podemos expresarla como una función:

$$y = \frac{k - a\,x}{b}$$

y a partir de ésta, encontrar las coordenadas de dos de sus puntos, y trazar la recta que pasa por éstos.

Ejemplo 1

Grafica cada una de las ecuaciones del siguiente S.E.L.:

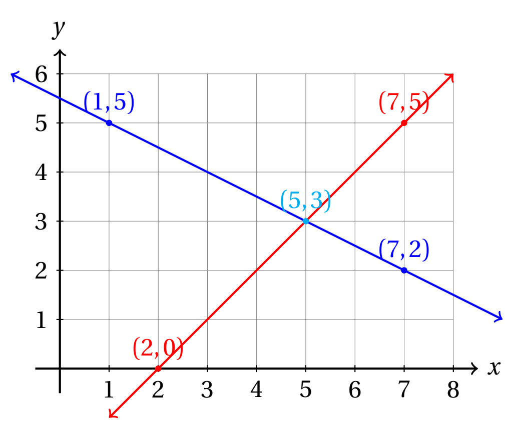
$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ x + 2y &= 11 \end{aligned}$$

- Para graficar las ecuaciones, primero debemos despejar y:

$$\begin{aligned} y &= x - 2 \\ y &= \frac{11 - x}{2} \end{aligned}$$

- Ahora necesitamos encontrar dos puntos para cada una de las rectas.
- Primero encontramos dos puntos (A y B) para la primera recta y después otros dos (C y D) para la segunda.
- Para esto, vamos a sustituir valores para x y calculamos el valor de y que le corresponde.
- Después de tener los puntos por donde pasa cada recta, las graficamos:

Punto	x	y
A	2	0
B	7	5
C	1	5
D	7	2



- Nosotros ya resolvimos este S.E.L. utilizando el método de igualación.
- Así que podemos ver que la solución es correcta, de acuerdo a aquel procedimiento.
- Este S.E.L. tiene solución única, porque al graficar las ecuaciones, obtenemos dos rectas que no son paralelas.

Cuando debamos resolver un S.E.L. de dos ecuaciones y dos variables, y al graficar las ecuaciones en un plano cartesiano, si esas dos rectas **no** son paralelas, tendremos dos rectas que se cortan en algún punto del plano. Ese punto, representa la solución del S.E.L.

Esto es así porque el punto pertenece simultáneamente a ambas rectas, y por tanto, satisface ambas ecuaciones.

Esa es precisamente la definición de la solución del S.E.L.

Otro será el caso cuando tengamos dos rectas paralelas y distintas.

Ejemplo 2

Resuelve el siguiente S.E.L.:

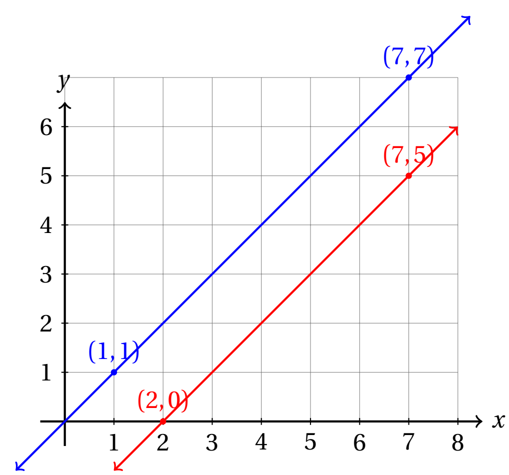
$$\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 2x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

- Para resolverlo, vamos a encontrar el determinante principal del S.E.L.:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (1)(-2) - (-1)(2) = (-2) - (-2) = 0$$

- Hasta ahora sabemos que el S.E.L. **no** tiene solución única, dado que $\Delta_p = 0$.
- Para saber si se trata de un S.E.L. con un número infinito de soluciones o no tiene solución, vamos a graficar las ecuaciones que forman el S.E.L.:
- Igual que en el ejemplo anterior, empezamos encontrando dos puntos para cada ecuación.
- Después graficamos las rectas:

Punto	x	y
A	2	0
B	7	5
C	1	1
D	7	7



- De la gráfica se hace evidente que este S.E.L. no tiene solución, porque se trata de dos rectas paralelas.

- Para saber si tiene un número infinito de soluciones o no tiene solución, utilizando el método de los determinantes, necesitamos encontrar los determinantes auxiliares y ver cómo se comportan en este caso:

$$\begin{aligned}\Delta_x &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = (2)(-2)-(-1)(0) = (-4)-(0) = -4\\ \Delta_y &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (1)(0)-(2)(2) = (0)-(4) = -4\end{aligned}$$

- Observa que ni Δ_x, ni Δ_y son iguales a cero[7].
- Esto nos indica que las rectas son paralelas, y por tanto, que el S.E.L. **no** tiene solución.

Ahora vamos a resolver un S.E.L. con un número infinito de soluciones para verificar que al menos uno de los determinantes auxiliares se hace cero.

Resuelve el siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned} x - y &= 2\\ 2x - 2y &= 4 \end{aligned}$$

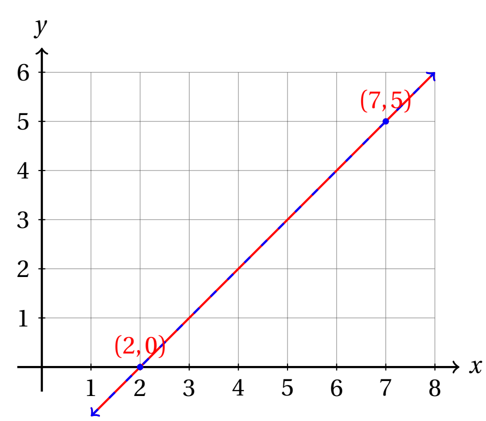
Ejemplo 3

- De nuevo, calculamos el determinante principal del S.E.L.:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (1)(-2)-(-1)(2) = (-2)-(-2) = 0$$

- Hasta ahora sabemos que el S.E.L. **no** tiene solución única, dado que $\Delta_p = 0$.
- Para saber si se trata de un S.E.L. con un número infinito de soluciones o no tiene solución, vamos a graficar las ecuaciones que forman el S.E.L.:
- Igual que en el ejemplo anterior, empezamos encontrando dos puntos para cada ecuación:

Punto	x	y
A	2	0
B	7	5
C	2	0
D	7	5



- De la gráfica se hace evidente que este S.E.L. no tiene solución, porque se trata de dos rectas paralelas, que además son la misma recta.

[7]Si al menos uno de los dos es distinto de cero, concluimos que el S.E.L. no tiene solución.

- Ahora vamos a estudiar cómo se comportan los determinantes auxiliares:

$$\begin{aligned}
\Delta_x &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (2)(-2)-(-1)(4) = (-4)-(-4) = 0 \\
\Delta_y &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4)-(2)(2) = (4)-(4) = 0
\end{aligned}$$

- Observa que: $\Delta_x = 0$, y también $\Delta_y = 0$.
- Esto nos indica que las rectas son paralelas, y además, la misma, y finalmente, que el S.E.L. **no** tiene solución.

Si consideramos el S.E.L. siguiente:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 x + \beta_1 y &= \kappa_1 \\
\alpha_2 x + \beta_2 y &= \kappa_2
\end{aligned}$$

y suponemos que $\Delta_p = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0$, se sigue que:

$$\begin{aligned}
\alpha_1\beta_2 &= \alpha_2\beta_1 \\
\frac{\alpha_1}{\alpha_2} &= \frac{\beta_1}{\beta_2} = \rho
\end{aligned}$$

Aquí, existe la posibilidad de que el cociente ρ sea igual o diferente al cociente κ_1/κ_2.

Si se cumple la igualdad:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$

Entonces, los tres determinantes, Δ_p, Δ_x y Δ_y serán iguales a cero[8], y a la vez, las ecuaciones del S.E.L. son equivalentes, pues podemos obtener una multiplicando (o dividiendo) la otra por ρ, y por eso tenemos un número infinito de soluciones.

Si un punto está sobre la primera recta, también está sobre la segunda, pues geométricamente son la misma recta.

El otro caso, en el cual:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \neq \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$

Se trata del caso en el que las rectas son paralelas y diferentes. Por eso el S.E.L. no tiene solución. Aquí, solamente $\Delta_p = 0$. Los determinantes auxiliares Δ_x, Δ_y pueden ser distintos de cero[9].

Una forma muy sencilla de notar si el S.E.L. tiene un número infinito de soluciones o no tiene soluciones consiste en buscar un número que multiplicado por una ecuación dé igual a la otra ecuación.

En el ejemplo anterior, si multiplicamos la primera ecuación por 2, obtenemos exactamente la segunda ecuación. Esto indica que las dos ecuaciones son la misma.

Si al multiplicar obtenemos el término independiente distinto, pero el resto de la ecuación igual a la otra, entonces tenemos dos rectas paralelas.

Ejemplo 4

Verifica si el S.E.L.:

$$\begin{aligned}
x - y &= 2 \\
2x - 2y &= 0
\end{aligned}$$

tiene o **no** tiene soluciones.

---

[8] Verifica que esto es verdad calculando los tres determinantes.

[9] Uno de ellos puede ser igual a cero, pero no ambos.

- Ya resolvimos este S.E.L..
- Lo que ahora vamos a hacer es buscar un número que multiplicado por la primera ecuación nos resulte la segunda ecuación.
- Evidentemente, podemos multiplicar la primera ecuación por 2 y obtenemos:

$$\begin{array}{rcr} x-y=2 & \Rightarrow & 2x-2y=4 \\ 2x-2y=0 & \Rightarrow & 2x-2y=0 \end{array}$$

- Vemos que el nuevo S.E.L. equivalente al original **no** tiene soluciones, porque se trata de dos rectas paralelas.
- Puedes concluir esto al ver que $4 \neq 0$.

Resuelve los siguientes S.E.L. por el método algebraico más conveniente. **NOTA:** Algunos de los S.E.L.'s tienen un número infinito de soluciones. Indica si se trata de ese caso. Respecto a los problemas, primero encuentra el S.E.L. que modela la situación y resuélvelo. Recuerda verificar que la solución satisfaga las condiciones iniciales del problema.

Ejercicios 3.2

1) $\begin{cases} x + y = -11 \\ -x - 2y = 20 \end{cases}$ $x=-2, y=-9$

2) $\begin{cases} x + 3y = -7 \\ -3x - 3y = 9 \end{cases}$ $x=-1, y=-2$

3) $\begin{cases} 6x + y = -4 \\ x - y = 4 \end{cases}$ $x=0, y=-4$

4) $\begin{cases} 3x + 2y = -14 \\ -6x + 2y = -14 \end{cases}$ $x=0, y=-7$

5) $\begin{cases} 3x + y = -8 \\ -x - y = 6 \end{cases}$ $x=-1, y=-5$

6) $\begin{cases} 6x + 3y = -9 \\ 4x - y = 21 \end{cases}$ $x=3, y=-9$

7) $\begin{cases} 2x + 2y = 18 \\ 5x + 4y = 37 \end{cases}$ $x=1, y=8$

8) $\begin{cases} 2x + 2y = -4 \\ x + y = -2 \end{cases}$ $x=0, y=-2$

9) $\begin{cases} x + 3y = -10 \\ -2x - 2y = -4 \end{cases}$ $x=8, y=-6$

10) $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 5x - 3y = -9 \end{cases}$ $x=0, y=3$

11) $\begin{cases} 3x + 4y = -23 \\ -2x + 4y = -38 \end{cases}$ $x=3, y=-8$

12) $\begin{cases} x+4y=18 \\ -x+3y=10 \end{cases}$ $x=2, y=4$

13) $\begin{cases} 5x+2y=-40 \\ -5x+y=25 \end{cases}$ $x=-6, y=-5$

14) $\begin{cases} x+2y=19 \\ -5x+y=-29 \end{cases}$ $x=7, y=6$

15) $\begin{cases} 5x+2y=50 \\ -6x+y=-43 \end{cases}$ $x=8, y=5$

16) $\begin{cases} 4x+2y=-12 \\ x+3y=-3 \end{cases}$ $x=-3, y=0$

17) $\begin{cases} 3x+y=10 \\ -5x-4y=-12 \end{cases}$ $x=4, y=-2$

18) $\begin{cases} 4x+3y=2 \\ 2x-y=16 \end{cases}$ $x=5, y=-6$

19) $\begin{cases} x+2y=-9 \\ -2x+3y=-10 \end{cases}$ $x=-1, y=-4$

20) $\begin{cases} 5x+y=-26 \\ -3x-3y=30 \end{cases}$ $x=-4, y=-6$

21) $\begin{cases} 5x+2y=54 \\ -5x+4y=-12 \end{cases}$ $x=8, y=7$

22) $\begin{cases} x+4y=26 \\ -6x+y=-31 \end{cases}$ $x=6, y=5$

23) $\begin{cases} 5x+y=-1 \\ -6x-3y=3 \end{cases}$ $x=0, y=-1$

24) $\begin{cases} 3x+y=-11 \\ -5x-4y=16 \end{cases}$ $x=-4, y=1$

25) $\begin{cases} 5x+2y=-28 \\ -3x+4y=22 \end{cases}$ $x=-6, y=1$

26) $\begin{cases} 4x+4y=20 \\ 5x+3y=17 \end{cases}$ $x=1, y=4$

27) $\begin{cases} x+4y=-31 \\ -x+y=-9 \end{cases}$ $x=1, y=-8$

28) $\begin{cases} x+y=-1 \\ -4x-4y=4 \end{cases}$ $x=7, y=-8$

29) $\begin{cases} 6x+4y=10 \\ 6x+y=16 \end{cases}$ $x=3, y=-2$

30) $\begin{cases} 2x + y = -6 \\ 6x - 4y = 38 \end{cases}$ $x = 1, y = -8$

31) $\begin{cases} 4x + 2y = -36 \\ 5x + y = -45 \end{cases}$ $x = -9, y = 0$

32) $\begin{cases} x + 4y = -6 \\ -x + 3y = -15 \end{cases}$ $x = 6, y = -3$

33) $\begin{cases} 6x + y = -50 \\ 2x - 3y = 10 \end{cases}$ $x = -7, y = -8$

34) $\begin{cases} 6x + 3y = 42 \\ x - 2y = -8 \end{cases}$ $x = 4, y = 6$

35) $\begin{cases} 5x + 2y = -5 \\ -2x + 2y = 16 \end{cases}$ $x = -3, y = 5$

36) $\begin{cases} 2x + y = -13 \\ 4x - y = -35 \end{cases}$ $x = -8, y = 3$

37) $\begin{cases} 4x + y = 0 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$ $x = 0, y = 0$

38) $\begin{cases} x + y = 8 \\ -4x - 3y = -33 \end{cases}$ $x = 9, y = -1$

39) $\begin{cases} x + 3y = -3 \\ -x - y = -3 \end{cases}$ $x = 6, y = -3$

40) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -5x - 4y = -14 \end{cases}$ $x = 2, y = 1$

41) $\begin{cases} 5x + 4y = -12 \\ -3x + 4y = -12 \end{cases}$ $x = 0, y = -3$

42) $\begin{cases} 5x + 3y = 55 \\ -x - 3y = -23 \end{cases}$ $x = 8, y = 5$

43) $\begin{cases} 3x + y = -26 \\ -2x - y = 19 \end{cases}$ $x = -7, y = -5$

44) Melissa compró 2 kg de tomate y 3 kg de papa por lo que pagó \$45.00 pesos. Nancy compró (al mismo precio) 3 kg de tomate y 2 kg de papa por \$50.00 pesos. ¿Cuál es el precio de cada kilogramo de papa? \$7.00 pesos/kg.

45) Si a la edad de Isabel la multiplicamos por 3 y al resultado le sumamos 4 obtenemos la edad de su tía Ana. Ambas edades suman 40. ¿Qué edad tiene cada una? Isabel: 9 años. Tía Ana: 31 años.

46) En un circo había 365 asistentes entre adultos y niños. Cada boleto de adulto costaba \$80.00 pesos, mientras que cada boleto de niño costaba \$45.00 pesos. ¿Cuántos niños y cuántos adultos asistieron al circo a una función, si se recaudaron por entradas \$25 175.00 pesos? Entraron 250 adultos y 115 niños.

47) En el cine del pueblo a la función de estreno asistieron 305 adultos y 150 niños, por lo que se recaudó un total de $28 850.00 pesos. El boleto de adulto cuesta $20.00 más que el de niño. ¿Cuáles son los precios de las entradas de adulto y de niño? Adulto. $70.00 pesos, niño: $50.00 pesos.

48) Un vendedor mezcla cacahuates y semilla de pipián para vender. El kilogramo de cacahuate le cuesta $30.00 pesos y el kilogramo de semilla de pipián cuesta $70.00 pesos. ¿Cuántos gramos de cada producto debe incluir en la mezcla si desea que el costo de producirlo sea de $4.00 pesos por cada 100 gramos? 75 gr de cacahuate y 25 gr de semilla de pipián.

49) En el hotel «*El descanso*» cambiaron los precios de las habitaciones que ofrecen. Originalmente la habitación doble tenía un costo de $150.00 por noche, mientras que la sencilla costaba $100.00 pesos por noche. Ahora, cuando el hotel tiene sus 65 habitaciones dobles y sus 35 habitaciones sencillas ocupadas todas, su ingreso diario es de $15 750.00 pesos. ¿Cuáles son los nuevos precios de cada habitación, si la diferencia de precios sigue siendo de $50.00 pesos? Sencilla: $125.00 pesos, doble: $175.00 pesos.

50) Un D.J. cobra $100.00 pesos por cada hora de trabajo durante las primeras cuatro horas y cada hora adicional la cobra a $175.00 pesos. En el aniversario de una tienda trabajó buena parte del día y por eso recibió $925.00 de salario. ¿Cuántas horas trabajó en total ese día? 9 horas

51) Un trabajador recibe $25.00 pesos por hora trabajada durante las primeras cuarenta horas de trabajo durante la semana y por cada hora extra adicional recibe $60.00 pesos. Durante la semana pasada recibió $1 420.00 pesos. ¿Cuántas horas extra trabajó? 7 horas.

52) Don Polo tiene 100 Ha de terreno para sembrar. El año pasado sembró maíz y frijol. Cada hectárea de siembre de maíz le costó $450.00 pesos, mientras que cada hectárea de frijol costó $1 500.00 pesos. En total necesitó de $76 500.00 pesos para sembrar todo su terreno. ¿Cuántas hectáreas de frijol y cuántas de maíz sembró? Frijol: 30 Ha, maíz: 70 Ha.

53) Un total de $20,000.00 pesos se invirtieron en acciones que otorgaban el 5% una parte y el resto en acciones que otorgaban el 8% anualmente. Al final del año se recaudaron $1 240.00 pesos como utilidad de la inversión. ¿Cuánto se invirtió en cada tipo de acciones? Al 5%: $12 000.00 pesos; al 8%: $8 000.00 pesos.

54) Una empresa decidió invertir $25 000.00 pesos en su campaña publicitaria. De acuerdo a la información que la compañía de publicidad les entregó, pueden utilizar esa inversión en (**A**) 72 días de anuncios de radio, transmitiendo 5 anuncios diariamente en las horas que ellos prefieran, y además, 200 playeras para regalar a los clientes que visiten sus instalaciones. La otra opción (**B**) consiste de 300 playeras y 58 días de anuncios de radio, transmitiendo 5 anuncios diariamente en las horas que ellos prefieran. ¿Cuánto cuesta cada playera publicitaria? $35.00 pesos.

55) De acuerdo con la información del ejercicio anterior, ¿cuánto cuesta cada anuncio de radio? $50.00 pesos.

56) **Reto:** David cambió el orden de las cifras de un número de dos cifras. El número que obtuvo era dos unidades mayor que el doble del número inicial. Notó que la suma de las cifras del número es igual a 7. ¿Cuál era el número inicial? 25

57) **Pronósticos:** Los parámetros m y b de la ecuación de la recta $y = m\,x + b$ que mejor se ajusta a los puntos $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$, $(5,5)$ y $(7,6)$ está dado por la solución del siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned} 18\,m + 5\,b &= 20 \\ 88\,m + 18\,b &= 87 \end{aligned}$$

a) Encuentra la ecuación de la recta de mejor ajuste para esos puntos.

b) Grafica la recta y los puntos en el mismo plano cartesiano.

58) **Geometría Analtica:** Las coordenadas del centro $C(x, y)$ de la circunferencia que pasa por los puntos: $A(0,2)$, $B(1,7)$ y $C(6,2)$ están dados por la solución del siguiente S.E.L.:

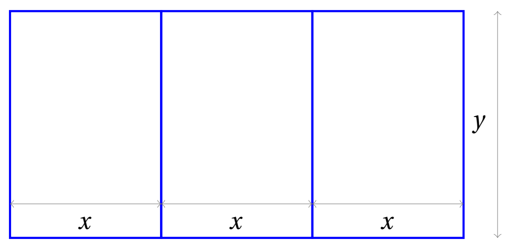
$$\begin{aligned} 5x - y &= 11 \\ 2x - 3y &= -6 \end{aligned}$$

a) Calcula las coordenadas del centro de la circunferencia $x = 3$, $y = 4$.

b) Grafica los tres puntos por donde pasa la circunferencia y su centro.

c) Traza la circunferencia con la ayuda de un compás.

59) Para cercar el terreno que se muestra enseguida se requirieron de 74 metros de tela ciclónica de alambre. Para cercar uno de los tres sectores completamente se requieren de 16 metros de malla. ¿Cuáles son las dimensiones de cada una de las divisiones? (**NOTA:** el dibujo no está a escala.) $x = 3$, $y = 5$.



60) **Reto:** Describe los métodos algebráicos (eliminación, igualación, sustitución y determinantes) para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

61) **Reto:** Explica en una hoja de papel cómo identificas un S.E.L. que no tiene soluciones.

62) **Reto:** Explica en una hoja de papel cómo identificas un S.E.L. que tiene un número infinito de soluciones.

Ahora vamos a generalizar el procedimiento que hemos utilizado para resolver sistemas de una ecuación con una incógnita y de 2 ecuaciones con dos incógnitas.

Para empezar, debemos notar que cuando resolvimos un S.E.L. de 2 ecuaciones con dos incógnitas, en los métodos de eliminación (suma y resta), sustitución e igualación, el propósito que perseguimos siempre fue de transformar el S.E.L. en un problema de una ecuación lineal con una sola incógnita. Es decir, redujimos un problema nuevo a un tipo de problema que ya sabemos cómo resolver.

En este caso haremos lo mismo.

Ejemplo 5

Resuelve el siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + y - z &= 0 \\ x - y + z &= 2 \end{aligned}$$

- En este primer ejemplo utilizaremos el método de suma y resta.
- Para esto, primero debemos decidir qué variable vamos a eliminar.
- Por ejemplo, podemos eliminar la variable z.

- Sumamos las primeras dos ecuaciones del S.E.L.:

$$\begin{array}{r} x + \;\; y + z = 6 \\ x + \;\; y - z = 0 \\ \hline 2x + 2y \qquad = 6 \end{array}$$

Así hemos obtenido una ecuación que tiene solamene las variables x, y.

- Podemos simplificar la ecuación dividiendo ambos lados de la igualdad entre 2 y obtener:

$$x + y = 3$$

- A esta nueva ecuación la llamaremos la ecuación A
- Ahora vamos a sumar las ecuaciones dos y tres:

$$\begin{array}{r} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ \hline 2x \qquad\quad = 2 \end{array}$$

- Esta última ecuación implica que[10] $x = 1$.
- De la ecuación A sabemos que $x + y = 3$, pero $x = 1$, por lo que necesariamente, $y = 2$.
- De la primera ecuación del S.E.L. y con los valores de las variables x, y podemos encontrar el valor de la variable z.
- Para esto, sustituimos los valores que ya conocemos en cualquiera de las ecuaciones del S.E.L..

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 1 + 2 + z &= 6 \\ z &= 6 - 3 = 3 \end{aligned}$$

- Entonces, la solución del S.E.L. es: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.
- Vamos a verificar la solución:

$$\begin{array}{lcl} x + y + z = 6 & \Rightarrow & 1 + 2 + 3 = 6 \\ x + y - z = 0 & \Rightarrow & 1 + 2 - 3 = 0 \\ x - y + z = 2 & \Rightarrow & 1 - 2 + 3 = 2 \end{array}$$

Al resolver un S.E.L. de 3 ecuaciones con 3 incógnitas podemos usar cualquiera de los métodos que ya hemos estudiado.

En el siguiente ejemplo aplicaremos el método de sustitución.

Ejemplo 6

Resuelve el siguiente S.E.L.:

$$\begin{array}{r} x + y + z = 10 \\ x + y - z = 0 \\ x - y + z = 6 \end{array}$$

- Iniciamos despejando la variable x de alguna de las ecuaciones.

[10] Traduce a palabras la ecuación para encontrar su solución.

- Elegimos la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} x+y-z &= 0 \\ x &= z-y \end{aligned}$$

- Ahora sustituimos este valor de x en las otras dos ecuaciones.
- Empezamos sustituyendo en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} (x)+y+z &= 10 \\ (z-y)+y+z &= 10 \\ 2z &= 10 \\ z &= 5 \end{aligned}$$

- Por suerte hemos encontrado el valor de z.
- Ahora vamos a sustituir el valor de y en la tercera ecuación:

$$\begin{aligned} x-y+z &= 6 \\ (z-y)-y+z &= 6 \\ -2y+2z &= 6 \end{aligned}$$

- Esta última ecuación puede simplificarse si dividimos entre dos ambos lados de la igualdad:

$$-y+z=3$$

- Pero ya sabemos que $z=5$, por lo que:

$$\begin{aligned} -y+z &= 3 \\ -y+5 &= 3 \end{aligned}$$

- Implica que $y=2$.
- Para encontrar el valor de x utilizamos el primer despeje que hicimos:

$$\begin{aligned} x &= z-y \\ x &= 5-2=3 \end{aligned}$$

- Con lo que la solución del S.E.L.es: $x=3$, $y=2$, $z=5$.
- Vamos a verificar el resultado:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 10 & \Rightarrow 3+2+5 &= 10 \\ x+y-z &= 0 & \Rightarrow 3+2-5 &= 0 \\ x-y+z &= 6 & \Rightarrow 3-2+5 &= 6 \end{aligned}$$

Igual pudimos haber sustituido el valor de la variable z que encontramos al inicio y simplificar el problema aún más.

El siguiente ejemplo se resuelve con el método de igualación.

Ejemplo 7

Resuelve el siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 10 \\ x+y-z &= 4 \\ x-y+z &= 8 \end{aligned}$$

- Empezamos despejando la variable x de dos ecuaciones.
- Elegimos las primeras dos ecuaciones del S.E.L.:

$$\begin{array}{rcl} x+y+z=10 & \Rightarrow & x=10-y-z \\ x+y-z=4 & \Rightarrow & x=4-y+z \end{array}$$

- Ahora igualamos esos despejes y obtendremos una ecuación:

$$\begin{array}{rcl} x=10-y-z & = & 4-y+z \\ 6 & = & 2z \end{array}$$

- Que implica $z=3$.
- Ahora vamos a simplificar el problema.
- En la siguiente igualación, vamos a sustituir el valor que ya conocemos.
- Despejamos x de nuevo, pero ahora de las últimas dos ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} x+y-z=4 & \Rightarrow & x=4-y+z \\ x-y+z=8 & \Rightarrow & x=8+y-z \end{array}$$

- Y al igualar obtenemos:

$$\begin{array}{rcl} x=4-y+z & = & 8+y-z \\ -2y+2z & = & 8-4 \\ -2y+2z & = & 4 \end{array}$$

- Simplificamos la ecuación dividiendo entre dos ambos lados de la igualdad:

$$-y+z=2$$

- Pero ya sabíamos que $z=3$, por lo que $y=1$.
- Finalmente, podemos encontrar el valor de la variable x a partir de cualquiera de los despejes:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 8+y-z \\ x & = & 8+1-3=6 \end{array}$$

- Ahora verificamos que la solución sea correcta:

$$\begin{array}{rl} x+y+z=10 & \Rightarrow 6+1+3=10 \\ x+y-z=\ \ 4 & \Rightarrow 6+1-3=\ \ 4 \\ x-y+z=\ \ 8 & \Rightarrow 6-1+3=\ \ 8 \end{array}$$

El siguiente ejemplo se resuelve a través del método de los determinantes.

Para esto, primero definimos cómo encontrar un determinante de tres por tres.

Definición 1

Determinante de tercer orden

Se calcula con la siguiente relación:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (a)(e)(i)+(d)(h)(c)+(g)(b)(f)-(c)(e)(g)-(f)(h)(a)-(i)(b)(d)$$

Ejemplo 8

Resuelve el siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 10 \\ x+y-z &= \ \ 4 \\ x-y+z &= \ \ 2 \end{aligned}$$

- Primero encontramos el determinante principal Δ_p del S.E.L.:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (1)+(-1)+(-1)-(1)-(1)-(1) = -4$$

- Dado que $\Delta_p \neq 0$, el S.E.L. tiene solución única.
- Ahora calculamos los determinantes auxiliares para cada una de las variables.
- Recuerda que en cada caso sustituimos la columna de las constantes por la columna de la variable correspondiente.
- Empezamos calculando el determinante auxiliar en x:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (10)+(-4)+(-2)-(2)-(10)-(4) = -12$$

- Ahora calculamos el determinante auxiliar en y:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (4)+(2)+(-10)-(4)-(-2)-(10) = -16$$

- Y finalmente, calculamos Δ_z:

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (2)+(-10)+(4)-(10)-(-4)-(2) = -12$$

- Ahora podemos calcular el valor de cada una de las variables:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\Delta_x}{\Delta_p} = \frac{-12}{-4} = 3 \\ y &= \frac{\Delta_y}{\Delta_p} = \frac{-16}{-4} = 4 \\ z &= \frac{\Delta_z}{\Delta_p} = \frac{-12}{-4} = 3 \end{aligned}$$

- Ahora verifica que la solución sea correcta.

El siguiente ejemplo es una aplicación sencilla de los S.E.L.'s de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

Ejemplo 9

Aarón, Bernardo y Claudio están jugando canicas. Aarón y Bernardo tienen 2 canicas más que el doble de lo que tiene Claudio. Entre Aarón y Claudio tienen 7 canicas más de las que tiene Bernardo, y entre los tres juntan 47 canicas. ¿Cuántas tiene cada uno de ellos?

- Primero debemos escribir el S.E.L. que modela esta situación.
- El texto del problema nos dice que «*Aarón y Bernardo tienen 2 canicas más que el doble de lo que tiene Claudio.*»
- Esto significa que si sumamos las cantidades de canicas que tiene Aarón más las que tiene Bernardo, esto será igual al doble de las que tiene Claudio más dos.
- Matemáticamente, si A representa la cantidad de canicas que tiene Aarón, B las que tiene Bernardo, y C las que tiene Claudio, tenemos:
$$A+B=2C+2$$
- Lo cual puede reescribirse de la siguiente forma:
$$A+B-2C=2$$
- La siguiente oración del problema dice: «*Entre Aarón y Claudio tienen 7 canicas más de las que tiene Bernardo*», esto es:
$$A+C=B+7$$
- Que puede escribirse como: $A-B+C=7$.
- La siguiente oración del problema dice: «*Entre los tres juntan 47 canicas*». Esto es:
$$A+B+C=47$$
- Entonces, el S.E.L. que modela esta situación es:
$$\begin{aligned} A+B-2C &= 2\\ A-B+C &= 7\\ A+B+C &= 47 \end{aligned}$$
- Ahora debemos resolverlo.
- Vamos a utilizar el método de los determinantes.
- Calculamos primero el determinante principal Δ_p:
$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)+(-2)+(1)-(2)-(1)-(1) = -6$$
- Dado que $\Delta_p \neq 0$, el S.E.L. tiene solución única.
- Así que podemos seguir calculando los determinantes auxiliares:
$$\begin{aligned} \Delta_A &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2\\ 7 & -1 & 1\\ 47 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)+(-14)+(47)-(94)-(2)-(7) = -72\\ \Delta_B &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2\\ 1 & 7 & 1\\ 1 & 47 & 1 \end{vmatrix} = (7)+(-94)+(2)-(-14)-(47)-(2) = -120\\ \Delta_C &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 7\\ 1 & 1 & 47 \end{vmatrix} = (-47)+(2)+(7)-(-2)-(7)-(47) = -90 \end{aligned}$$

- Y a partir de estos valores podemos conocer cuánto tiene cada uno de ellos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\Delta_A}{\Delta_p} = \frac{-72}{-6} = 12 \\ B &= \frac{\Delta_B}{\Delta_p} = \frac{-120}{-6} = 20 \\ C &= \frac{\Delta_C}{\Delta_p} = \frac{-90}{-6} = 15 \end{aligned}$$

- Ahora verificamos que la solución sea correcta.
- **Primera Condición:** «*Aarón (12) y Bernardo (20) tienen 2 canicas más que el doble de lo que tiene Claudio (15).*» se cumple, porque:
$$12+20=2(15)+2$$
- **Segunda Condición:** «*Entre Aarón y Claudio tienen 7 canicas más de las que tiene Bernardo.*» se cumple, porque:
$$12+15=20+7$$
- **Tercera Condición:** «*Entre los tres juntan 47 canicas.*» se umple, porque:
$$12+20+15=47$$
- Entonces, Aarón tiene 12 canicas, Bernardo tiene 20 y Claudio tiene 15.

Tres bombas de distintos colores se utilizan para llenar una piscina. Cuando trabajan solamente las bombas amarilla y blanca tardan 12 minutos. Cuando trabajan solamente las bombas blanca y café tardan 6 minutos y 40 segundos, es decir $6+2/3$ minutos. Cuando trabajan las bombas amarilla y café tardan 7 minutos y medio, es decir, 7.5 min. ¿Cuánto tardarán las tres en llenar la piscina trabajando juntas?

Reto 1

3.2.6 S.E.L. 3×3 con y sin solución

En los ejemplos de la sección anterior estudiamos solamente S.E.L.'s que tenían solución única.

Sin embargo, existen algunos que **no** tienen solución.

Por ejemplo, el siguiente S.E.L..

Resuelve el siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ x+y-z &= 0 \\ x+y+z &= 2 \end{aligned}$$

Ejemplo 1

- Para darnos cuenta de que este S.E.L. no tiene solución, basta encontrar el determinante principal y si éste es igual a cero, hemos terminado:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (1)+(1)+(-1)-(1)-(-1)-(1)=0$$

- Dado que $\Delta_p = 0$, el S.E.L. no tiene solución única.
- Sin embargo, todavía es posible que tenga un número infinito de soluciones, como puede que no tenga ni una solución.
- Para averiguar qué caso corresponde, calculamos los determinantes auxiliares:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (6)+(0)+(-2)-(2)-(-6)-(0) = 8$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (0)+(2)+(-6)-(0)-(-2)-(6) = -8$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2)+(6)+(0)-(6)-(0)-(2) = 0$$

- Dado que no todos los determinantes son iguales a cero, el S.E.L. **no** tiene ninguna solución.
- En este caso estamos hablando dos espacios geométricos paralelos.
- Para convencerte que esto es verdad, observa la primera y tercera ecuaciones del S.E.L.
- Solamente difieren en el término independiente (a la derecha de la igualdad).
- Esto nos indica que tienen la misma dirección, pero no pasan por el mismo punto.
- Entonces, no existe ningún punto que satisfaga simultáneamente a la primera y tercera ecuaciones del S.E.L., por lo que no tiene solución.

Algunos problemas tienen solución matemática, sin embargo, esta solución no tiene sentido físico.

Ejemplo 2

Un comerciante desea preparar una mezcla de nueces, cacahuates y pistaches para vender con las siguientes propiedades:

Componente	**Precio (100 gr)**	**Vitamina X**	**Vitamina Y**
Nueces	\$25.00 pesos	12	5
Cacahuates	\$20.00 pesos	20	7
Pistaches	\$35.00 pesos	15	6
Mezcla	\$$P$ pesos	17	6

¿A qué precio P debe vender 100 gramos de esa mezcla?

- Para conocer el precio de 100 gramos de esa mezcla necesitamos resolver primero encontrar el S.E.L. que modela esa situación.
- Una vez que tengamos el sistema que modela esa situación podremos resolverlo, para conocer los valores de los gramos que debe contener de cada componente, y a partir de esa información, calcular el precio de los 100 gramos de la mezcla.
- Empezamos con el S.E.L.

- Sean n el número de gramos de nuez que contendrán 100 gramos de esa mezcla,
- c el número de gramos de cacahuate que contendrán esos 100 gramos de la mezcla, y
- p el número de gramos de pistache que contendrán los 100 gramos de mezcla.
- Evidentemente, la suma de los gramos debe ser 100, por eso:
$$n + c + p = 100$$
- La ecuación que nos ayuda a calcular la cantidad de Vitamina X que contiene la mezcla es:
$$12\,n + 20\,c + 15\,p = 17$$
- Y la ecuación que nos ayuda a calcular la cantidad de Vitamina Y que contiene esa mezcla es:
$$5\,n + 7\,c + 6\,p = 6$$
- Entonces, el S.E.L. que modela este problema es:
$$\begin{array}{rcrcrcr} n & + & c & + & p & = & 100 \\ 12\,n & + & 20\,c & + & 15\,p & = & 17 \\ 5\,n & + & 7\,c & + & 6\,p & = & 6 \end{array}$$
- Ahora debemos resolver el sistema.
- Utilizaremos el método de los determinantes.
- Calculamos el determinante principal, que denotaremos por: Δ_π:
$$\Delta_\pi = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 12 & 20 & 15 \\ 5 & 7 & 6 \end{vmatrix} = (120) + (84) + (75) - (100) - (105) - (72) = 2$$
- Dado que $\Delta_\pi \neq 0$, el S.E.L. tiene solución única.
$$\begin{aligned} \Delta_n &= \begin{vmatrix} 100 & 1 & 1 \\ 17 & 20 & 15 \\ 6 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 1\,487 \\ \Delta_c &= \begin{vmatrix} 1 & 100 & 1 \\ 12 & 17 & 15 \\ 5 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 299 \\ \Delta_p &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 100 \\ 12 & 20 & 17 \\ 5 & 7 & 6 \end{vmatrix} = -1\,586 \end{aligned}$$
- No hay necesidad de ir más adelante.
- Dado que $\Delta_\pi > 0$, cuando dividamos cualquier número negativo entre Δ_π obtendremos un cociente negativo.
- Este argumento nos dice que $p < 0$.
- No podemos agregar $-1586/2 = -793$ gramos de pistaches a la mezcla.
- Esto nos indica que, a pesar de que la representación matemática del problema tiene solución única, el problema físico no se puede resolver.
- El signo negativo de $p = -793$ indica que deberíamos quitar en lugar de agregar, pero ¿cómo vamos a quitarle? si inicialmente, la mezcla contenía cero gramos de pistaches.

Resuelve los siguientes S.E.L. por el método algebraico más conveniente. En cao de que un S.E.L. no tenga soluciones, o presente un número infinito de soluciones, indícalo. Respecto a los problemas, primero encuentra el S.E.L. que modela la situación y resuélvelo. También verifica que la solución satisfaga sus condiciones.

Ejercicios 3.2

1) $\begin{cases} 2x+3y+6z=-23 \\ -4x+2y+z=28 \\ x+4y+2z=-7 \end{cases}$ $x=-7, y=1, z=-2$

2) $\begin{cases} x+y-4z=-7 \\ -2x+5y+z=-28 \\ x+3y+z=-19 \end{cases}$ $x=-1, y=-6, z=0$

3) $\begin{cases} x+4y-2z=-16 \\ x+y+z=-7 \\ 3x+y+3z=-3 \end{cases}$ $x=8, y=-9, z=-6$

4) $\begin{cases} x+y-6z=-36 \\ -2x+4y+4z=-6 \\ 5x+3y+z=-69 \end{cases}$ $x=-9, y=-9, z=3$

5) $\begin{cases} 3x+2y-z=-1 \\ 4x+5y+4z=-31 \\ x+y+3z=-20 \end{cases}$ $x=-3, y=1, z=-6$

6) $\begin{cases} x+3y-2z=26 \\ -3x+y+z=2 \\ 3x+y+2z=-10 \end{cases}$ $x=-1, y=5, z=-6$

7) $\begin{cases} x+4y-2z=-9 \\ x+3y+2z=-15 \\ x+4y+4z=-21 \end{cases}$ $x=-5, y=-2, z=-2$

8) $\begin{cases} 6x+2y+z=16 \\ x+6y+2z=-20 \\ 5x+3y+z=8 \end{cases}$ $x=4, y=-4, z=0$

9) $\begin{cases} 6x+y+2z=-30 \\ -3x+3y+3z=-21 \\ 6x+4y+z=-21 \end{cases}$ $x=-2, y=0, z=-9$

10) $\begin{cases} x+2y-4z=15 \\ 2x+y+2z=10 \\ 3x+y+z=19 \end{cases}$ $x=7, y=0, z=-2$

11) $\begin{cases} 6x+y+z=32 \\ -2x+6y+3z=16 \\ 4x+y+z=24 \end{cases}$ $x=4, y=0, z=8$

12) $\begin{cases} 3x + y - 2z = 4 \\ -2x + y + z = -13 \\ x + 4y + z = -19 \end{cases}$ $x = 4, y = -6, z = 1$

13) $\begin{cases} 3x + 2y - 2z = -26 \\ x + 2y + 4z = -12 \\ 2x + 3y + z = -25 \end{cases}$ $x = -4, y = -6, z = 1$

14) $\begin{cases} x + y - z = 8 \\ -x + y + 2z = 6 \\ 4x + 3y + 3z = 55 \end{cases}$ $x = 7, y = 5, z = 4$

15) $\begin{cases} 2x + y + 4z = -3 \\ -x + y + 3z = 16 \\ 4x + 2y + 4z = -14 \end{cases}$ $x = -7, y = 3, z = 2$

16) $\begin{cases} 6x + 3y + z = 37 \\ -x + 2y + 3z = -10 \\ x + 4y + 3z = 4 \end{cases}$ $x = 6, y = 1, z = -2$

17) $\begin{cases} 5x + 3y - 4z = 60 \\ -x + 4y + z = 10 \\ 4x + y + 4z = 5 \end{cases}$ $x = 5, y = 5, z = -5$

18) $\begin{cases} x + y - z = -6 \\ -x + 2y + 2z = -18 \\ 2x + 3y + 2z = -9 \end{cases}$ $x = 6, y = -9, z = 3$

19) $\begin{cases} 4x + 4y + 4z = -80 \\ 4x + 5y + z = -58 \\ 6x + y + 3z = -68 \end{cases}$ $x = -6, y = -5, z = -9$

20) $\begin{cases} 6x + 4y + z = 66 \\ x + 5y + z = 48 \\ 6x + 3y + z = 59 \end{cases}$ $x = 5, y = 7, z = 8$

21) $\begin{cases} 3x + 3y - 5z = -4 \\ -x + y + 2z = 0 \\ 5x + y + z = -44 \end{cases}$ $x = -8, y = 0, z = -4$

22) $\begin{cases} x + y - 2z = -17 \\ -x + 3y + 2z = 1 \\ 6x + 3y + 2z = 22 \end{cases}$ $x = 3, y = -4, z = 8$

23) $\begin{cases} 6x + 2y + 5z = -90 \\ x + 3y + z = -24 \\ 6x + y + 4z = -81 \end{cases}$ $x = -9, y = -3, z = -6$

24) $\begin{cases} 5x + y - 6z = 3 \\ -x + 3y + z = -12 \\ 3x + 2y + 2z = -43 \end{cases}$ $x = -7, y = -4, z = -7$

25) $\begin{cases} x + y - 3z = -21 \\ -4x + 6y + z = -11 \\ 2x + 2y + z = -7 \end{cases}$ $x = -2, y = -4, z = 5$

26) $\begin{cases} x + y - 5z = 15 \\ -x + 2y + 2z = -9 \\ 4x + y + z = 36 \end{cases}$ $x = 9, y = 1, z = -1$

27) $\begin{cases} 3x + 2y - 6z = -43 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ x + 2y + z = -4 \end{cases}$ $x = -9, y = 1, z = 3$

28) $\begin{cases} 5x + y - 5z = -86 \\ -x + 4y + 3z = 29 \\ 3x + 3y + z = -22 \end{cases}$ $x = -9, y = -1, z = 8$

29) $\begin{cases} x + 4y - 6z = 40 \\ 3x + y + 4z = -1 \\ 4x + y + 4z = -3 \end{cases}$ $x = -2, y = 9, z = -1$

30) $\begin{cases} 3x + 2y - 4z = -51 \\ x + 4y + 4z = 15 \\ 4x + 2y + 2z = -24 \end{cases}$ $x = -9, y = 0, z = 6$

31) $\begin{cases} 4x + y + 2z = 11 \\ -x + 2y + 4z = 22 \\ 6x + 2y + 4z = 22 \end{cases}$ $x = 0, y = -7, z = 9$

32) $\begin{cases} x + 3y - 6z = -60 \\ -x + 4y + 4z = 28 \\ 2x + 4y + 4z = 28 \end{cases}$ $x = 0, y = -2, z = 9$

33) $\begin{cases} 5x + y - 2z = 32 \\ -2x + 5y + 3z = -18 \\ 2x + 4y + z = 11 \end{cases}$ $x = 9, y = -3, z = 5$

34) $\begin{cases} 2x + y + z = 9 \\ -4x + 5y + 3z = 17 \\ 5x + y + 4z = 15 \end{cases}$ $x = 2, y = 5, z = 0$

35) $\begin{cases} 6x + 3y + 5z = -44 \\ -3x + y + z = 21 \\ x + y + 2z = -8 \end{cases}$ $x = -7, y = 1, z = -1$

36) Para la fiesta de graduación compré unos zapatos, un pantalón y una camisa. Los zapatos y el pantalón me costaron \$410.00 El pantalón y la camisa me costaron lo mismo que los zapatos. La camisa y los zapatos cuestan \$340.00 ¿Cuánto me costó cada uno?
Zapatos: \$250.00, pantalón: \$160.00, y camisa: \$90.00

37) Alicia, Blanca y Claudia son amigas. Alicia, la mayor, tiene tantos años como la suma de las edades de Blanca y Claudia. La edad de Blanca es la cuarta parte de la suma de las edades de Alicia y Claudia. Si a la edad de Claudia le sumamos 3 años, obtenemos el promedio de las edades de Alicia y Blanca. ¿Qué edad tiene cada una de ellas? Alicia: 30 años, Blanca: 12 años, Claudia, 18 años.

38) Ana, Itzel y Gaby son mis sobrinas. La suma de las edades de Ana e Itzel es 10 años. La suma de las edades de Itzel y Gaby es 5 años. La suma de las edades de Ana y Gaby es 13 años. ¿Qué edad tiene cada una de ellas? Ana: 9 años, Gaby: 4 años, Itzel: 1 año.

39) Un nutriólogo necesita combinar tres complementos alimenticios A, B, C. El alimento A contiene 40 componentes de proteínas y 25 de vitamínas por cada 100 gramos. El complemento B contiene 60 componentes de proteínas y 20 de vitamínas por cada 100 gramos. El complemento alimenticio C contiene 45 componentes de proteínas y 30 de vitamínas por cada 100 gramos. La mezcla que requiere el nutriólogo debe contener 48.25 componentes de proteínas y 29.75 componentes de vitaminas por cada 100 gramos. ¿Cuántos gramos de cada alimento A, B, C debe contener la mezcla? A: 35 gr, B: 15 gr., C: 30 gr.

40) Compré tres libros. Todos excepto el primero costaron \$370.00 pesos. Todos excepto el segundo costaron \$480.00 pesos. Todos excepto el tercero costaron \$430.00 pesos. ¿Cuánto costó cada libro?
Primero: \$215.00, segundo: \$180.00, tercero: \$150.00 pesos.

41) **Geometría Analtica:** Los parámetros a, b, c de la ecuación de la parábola $y = a\,x^2 + b\,x + c$ que pasa por los puntos: $A(1,4)$, $B(2,1)$ y $C(6,9)$ están dados por la solución del siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned} a + \quad b + c &= 4 \\ 4\,a + 2\,b + c &= 1 \\ 36\,a + 6\,b + c &= 9 \end{aligned}$$

¿Cuál es la ecuación de la parábola? $y = x^2 - 6\,x + 9$.

42) **Geometría Analtica:** Los parámetros a, b, c de la ecuación de la parábola $y = a\,x^2 + b\,x + c$ que pasa por los puntos: $A(-1,7)$, $B(2,2)$ y $C(4,-2)$ están dados por la solución del siguiente S.E.L.:

$$\begin{aligned} a - \quad b + c &= -7 \\ 4\,a + 2\,b + c &= \quad 2 \\ 16\,a + 4\,b + c &= -2 \end{aligned}$$

¿Cuál es la ecuación de la parábola? $y = -x^2 + 4\,x - 2$.

43) **Reto:** María compró cuatro libros. Todos excepto el primero costaron \$555.00 pesos. Todos excepto el segundo costaron \$590.00 pesos. Todos excepto el tercero costaron \$620.00 pesos. Todos excepto el cuarto costaron \$545.00 pesos. ¿Cuánto costó cada libro?
Primero: \$215.00, segundo: \$180.00, tercero: \$150.00, cuarto: \$225.00 pesos.

Capítulo 4

Ecuaciones de segundo grado

Por aprender...

Por qué es importante...

Las ecuaciones cuadráticas aparecerán muy frecuentemente en la resolución de problemas prácticos. También son de ayuda en la resolución de otros problemas geométricos, algebraicos y aritméticos.

4.1 Resolución de Ecuaciones de Segundo Grado

Ecuación de Segundo Grado

Es una ecuación que se puede escribir de la forma:

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \tag{4.1}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, y $a \neq 0$.
A la ecuación de segundo grado también se le conoce como ecuación cuadrática, debido a que el término principal es el término cuadrático.

Definición 1

En la ecuación cuadrática encontramos tres términos:

$$\underbrace{a\,x^2}_{\text{Cuadrático}} + \underbrace{b\,x}_{\text{Lineal}} + \underbrace{c}_{\text{Independiente}} = 0$$

Es importante que aprendas a reconocer cada uno de los términos así como sus coeficientes.

En caso de que tengas una ecuación que no tiene la forma 4.1, pero que puedes reducirla a esa forma, entonces esa ecuación también es cuadrática.

Las siguientes ecuaciones son ecuaciones cuadráticas. **Ejemplo 3**

- $2\,x^2 = 0$
- $x^2 - 1 = 80$
- $\dfrac{x^2}{5} + x = 100$
- $\sqrt{5}\,x^2 + 12\,x - \dfrac{7}{2} = 0$
- $(x-2)(3\,x+5) = 0$
- $\dfrac{1}{x+3} - \dfrac{1}{x-5} = 1$
- $\dfrac{1}{x+7} + \dfrac{1}{x-1} = 1$

También es importante identificar ecuaciones que **no** son cuadráticas.

Las ecuaciones que se enlistan enseguida **no** son cuadráticas. **Ejemplo 4**

- $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$, esta es una ecuación de tercer grado, porque el mayor exponente presente en la misma es 3.
- $x^4 - 1 = 0$, esta es una ecuación de cuarto grado, aunque a través de una transformación, podemos escribirla como si se tratara de una ecuación cuadrática.
- $5\,x + 1 = 0$, es una ecuación lineal, o de primer grado.
- $1 - x^3$. Esta ni siquiera es una ecuación, pues no tiene el signo de igualdad. Se trata de un binomio.

- $7x^5 - x^2 + 1 = 0$, es una ecuación de quinto grado.

Como podrás haber entendido, las ecuaciones se clasifican de acuerdo al exponente más grande que aparece entre sus términos.

La solución de una ecuación cuadrática es el conjunto de todos los valores que podemos sustituir en la literal para que la igualdad se reduzca a una igualdad.

Ejemplo 5

Encuentra la solución de la ecuación:

$$2x^2 = 0$$

- Para encontrar la solución de esta ecuación cuadrática vamos a traducir a palabras lo que nos está diciendo:
- En palabras nos dice: «*Pensé un número, lo multipliqué por sí mismo. Al resultado lo multipliqué por dos y finalmente obtuve cero. ¿Qué número pensé?*»
- Como el resultado de la multiplicación es cero, antes de multiplicar, debía tener cero.
- Esto nos indica que pensó el número cero, porque cero es el único número que al multiplicarlo por sí mismo nos da cero.
- Es decir, esta ecuación cuadrática tiene una única solución y es: $x = 0$.
- **Verificación:**

$$2x^2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad 2(0)^2 = 0$$

Ejemplo 6

Encuentra la solución de la ecuación:

$$x^2 - 1 = 80$$

- Esta ecuación nos dice en palabras: «*Pensé un número, lo multipliqué por sí mismo. Al resultado le resté 1 y finalmente obtuve 80. ¿Qué número pensé?*»
- Antes de restar uno, no tenía 80, sino 81.
- Y ese es el resultado que obtuvo cuando multiplicó por sí mismo el número que pensó.
- Entonces, debió pensar el número 9, porque: $(9)(9) = 81$.
- Pero también pudo haber pensado el número -9, porque: $(-9)(-9) = 81$.
- Es decir, esta ecuación cuadrática tiene dos soluciones distintas: $x = 9$, y $x = -9$.
- Ahora hacemos la comprobación:

$$\begin{array}{lcl} x^2 - 1 = 80 & \Rightarrow & (9)^2 - 1 = 80 \\ x^2 - 1 = 80 & \Rightarrow & (-9)^2 - 1 = 80 \end{array}$$

Existen varios métodos para resolver ecuaciones cuadráticas.

Algunos métodos requieren que puedas identificar los coeficientes de la ecuación.

Llena la siguiente tabla con los coeficientes de cada ecuación donde corresponde. **Ejemplo 7**

- El coeficiente a se llama *cuadrático* porque es el número que está multiplicando a la literal elevada al cuadrado.
- El coeficiente b se llama *lineal* porque es el número que está multiplicando a la literal sin elevar al cuadrado.
- Y el coeficiente c se llama *idependiente* pues **no** contiene variables.
- Lo siguientes ejemplos servirán para mostrarlo mejor:

Ecuación	**Coeficiente**		
$a x^2 + b x + c = 0$	a	b	c
$2x^2 = 0$	2	0	0
$\sqrt{5}x^2 + 12x - \dfrac{7}{2} = 0$	$\sqrt{5}$	12	$-7/2$
$\dfrac{x^2}{5} + x = 100$	$1/5$	1	-100
$(x-2)(3x+5) = 0$	3	-1	-10

- Observa que en el ejemplo de la ecuación: $(x-2)(3x+5) = 0$, primero multiplicamos los binomios para expresar la ecuación en la forma (4.1).
- De otra forma, no concemos los coeficientes de la ecuación.
- También es importante mencionar que cuando no aparece un término, el coeficiente es cero.
- Esto es así porque $0x = 0$.
- Pero recuerda que $a \neq 0$, porque si no aparece un término cuadrático en la ecuación, entonces, no se trata de una ecuación cuadrática.

ECUACIÓN CUADRÁTICA INCOMPLETA

Una ecuación cuadrática $a x^2 + b x + c = 0$ es incompleta cuando $b = 0$, o $c = 0$, o tal vez ambos son iguales a cero.
Si todos los coeficientes de la ecuación cuadrática son distintos de cero, entonces decimos que la ecuación es cuadrática completa. **Definición 2**

Como viste en los anteriores ejemplos, resolver ecuaciones incompletas es muy sencillo.

El siguiente ejemplo encontramos la solución de una ecuación completa.

Encuentra la(s) solución(es) de la siguiente ecuación cuadrática: **Ejemplo 8**

$$(x-2)(3x+5) = 0$$

- Para empezar, no es una buena idea multiplicar los binomios.
- Es mejor observar que los dos binomios se están multiplicando y el resultado de esa multiplicación es igual a cero.
- Para que eso ocurra, al menos uno de los binomios debe ser cero.
- Entonces, tenemos dos casos: bien $x-2=0$, o bien $3x+5=0$.
- Ahora encontramos los valores que debe tener x para que se cumplan las anteriores condiciones:

$$\begin{array}{rcl} x-2=0 & \Rightarrow & x=2 \\ 3x+5=0 & \Rightarrow & x=-\dfrac{5}{3} \end{array}$$

- Esas son las soluciones de la ecuación cuadrática.
- Para verificar que la ecuación cuadrática es completa, necesitamos multiplicar los binomios:

$$(x-2)(3x+5)=3x^2-x-10=0$$

Para resolver las ecuaciones cuadráticas, completas o incompletas se han inventado métodos muy sencillos.

En las siguiente secciones estudiaremos algunos de ellos.

4.1.1 Método de despeje

Cuando tenemos una ecuación cuadrática incompleta es muy buena idea hacer un despeje para resolverla.

Este método es el más sencillo para este tipo de ecuaciones.

Ejemplo 1

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2+1=50$$

- Como se trata de una ecuación incompleta, que carece del término lineal, ($b=0$) podemos resolverla fácilmente con un despeje:

$$\begin{array}{rcl} x^2+1 & = & 50 \\ x^2 & = & 50-1 \\ x^2 & = & 49 \end{array}$$

- Ahora observa que tenemos una ecuación equivalente a la inicial.
- Esta ecuación en palabras nos está diciendo: «*Pensé un número, lo multipliqué por sí mismo y obtuve 49. ¿Qué número pensé?*»
- Obviamente, pudo haber pensado el número 7.
- Pero también es posible que haya pensado el número -7, porque: $(-7)^2=49$.
- Entonces, las soluciones de la ecuación son: $x=7$, y $x=-7$.

- **Verificación:**

$$\begin{array}{rcl} x^2+1=50 & \Rightarrow & (7)^2+1=50 \\ x^2+1=50 & \Rightarrow & (-7)^2+1=50 \end{array}$$

Encuentra la(s) solución(es) de la siguiente ecuación cuadrática:

$$4x^2=100$$

Ejemplo 2

- En este caso, de nuevo, no aparece de nuevo el término lineal.
- Para simplificar la ecuación dividimos ambos lados de la igualdad entre 4, y obtenemos:

$$x^2=25$$

- Ahora traducimos a palabras la ecuación: «*Pensé un número, lo multipliqué por sí mismo y obtuve 25. ¿Qué número pensé?*»
- Pues bien pudo pensar el número 5, como pudo pensar el número -5.
- Como siempre aparecen dos casos, uno positivo y otro negativo, vamos a hacer el despeje de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} x^2 & = & 25 \\ x & = & \pm\sqrt{25} \\ x & = & \pm 5 \end{array}$$

- Y entenderemos por el símbolo $\pm$ que hay dos soluciones, el primero cuando consideramos el signo $+$ y el segundo cuando consideramos el signo $-$.
- Ahora verificamos que la solución sea correcta:

$$\begin{array}{rcl} 4x^2=100 & \Rightarrow & 4(5)^2=100 \\ 4x^2=100 & \Rightarrow & 4(-5)^2=100 \end{array}$$

Ahora solamente vamos a hacer el despeje cuando encontremos una ecuación cuadrática sin término lineal.

Encuentra la solución de la siguiente ecuación cuadrática:

$$3x^2+3=30$$

Ejemplo 3

- De nuevo, se trata de una ecuación cuadrática incompleta.

- Vamos a despejar la incógnita: x

$$\begin{aligned} 3x^2+3 &= 30 \\ 3x^2 &= 30-3=27 \\ x^2 &= \frac{27}{3}=9 \end{aligned}$$

- Ahora sabemos que pensó alguno de los dos números, $x=\pm 3$.
- Porque al hacer el despeje:

$$\begin{aligned} x^2 &= 9 \\ x &= \pm\sqrt{9} \\ x &= \pm 3 \end{aligned}$$

- **Verificación:**

$$\begin{aligned} 3x^2+3=30 \quad &\Rightarrow \quad 3(3)^2+3=30 \\ 3x^2+3=30 \quad &\Rightarrow \quad 3(-3)^2+3=30 \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Encuentra la solución de la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2+\frac{3}{4}=1$$

- Empezamos haciendo el despeje de la literal:

$$\begin{aligned} x^2 &= 1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

- Ahora aplicamos las leyes de los exponentes y de los radicales:

$$\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\pm\left(\frac{1}{4}\right)^{1/2}=\pm\frac{(1)^{1/2}}{(4)^{1/2}}=\pm\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} \\ x &= \pm\frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Y las soluciones son: $x=\frac{1}{2}$, y $x=-\frac{1}{2}$.
- **Verificación:**

$$\begin{aligned} x^2+\frac{3}{4}=1 \quad &\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=1 \\ x^2+\frac{3}{4}=1 \quad &\Rightarrow \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=1 \end{aligned}$$

Encuentra la solución de la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2+5=12$$

Ejemplo 5

- Despejando la literal x obtenemos:

$$\begin{aligned} x^2+5 &= 12 \\ x^2 &= 12-5=7 \\ x &= \pm\sqrt{7} \end{aligned}$$

- Lo cual nos indica que las soluciones de la ecuación son $x=\sqrt{7}$, y $x=-\sqrt{7}$.
- **Verificación:**

$$\begin{aligned} x^2+5=12 \quad &\Rightarrow \quad (\sqrt{7})^2+5=12 \\ x^2+5=12 \quad &\Rightarrow \quad (-\sqrt{7})^2+5=12 \end{aligned}$$

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2+12=5$$

Ejemplo 6

- Hacemos el despeje:

$$\begin{aligned} x^2+12 &= 5 \\ x^2 &= 5-12=-7 \\ x^2 &= -7 \end{aligned}$$

- Ahora vamos a traducir lo que esta última igualdad nos dice en palabras: «*Pensé un número, lo multipliqué por sí mismo y obtuve* -7».
- Pero al multiplicar un número positivo por sí mismo obtenemos un numero positivo,
- Por otra parte, cuando multiplicamos un número negativo por sí mismo, también obtenemos un resultado positivo.
- Lo que esto nos indica es que **no** hay algún número real que al multiplicarse por sí mismo nos dé como resultado un número negativo.
- Al terminar el despeje obtenemos:

$$\begin{aligned} x^2 &= -7 \\ x &= \pm\sqrt{-7} \end{aligned}$$

- Debido a esto, se han inventado los números imaginarios.

Definición 1

NÚMERO IMAGINARIO

El número i es la unidad imaginaria que tiene la siguiente propiedad:

$$i^2 = -1 \qquad \Rightarrow \qquad i = \sqrt{-1}$$

Un número imaginario es un múltiplo de la unidad imaginaria.

Entonces, la solución del último ejemplo puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{-7} \\ &= \pm\sqrt{(-1)(7)} \\ &= \pm\sqrt{-1}\sqrt{7} \\ &= \pm i\sqrt{7} \end{aligned}$$

Con la propiedad de que $i^2 = -1$.

Otra forma de definir al número imaginario i es la siguiente:

Comentario

El número imaginario i la solución positiva de la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 + 1 = 0$$

Porque si despejamos la incógnita, obtenemos:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 0 \\ x^2 &= -1 \\ x &= \pm\sqrt{-1} \end{aligned}$$

La solución positiva es: $x = \sqrt{-1}$, que es precisamente como definimos al número i.

Nosotros podemos sumar un número imaginario con un número real. El resultado es un número complejo.

Definición 2

NÚMERO COMPLEJO

Es un número que tiene una parte real y una parte imaginaria:

$$z = a + i\,b$$

donde z es un número complejo, $a, b \in \mathbb{R}$, y el número i es la unidad imaginaria.

Por ejemplo, el número $3 + 2\,i$ es un número complejo. En este número complejo, 3 es la parte real y 2 es la parte imaginaria.

Ejemplo 7

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$(x - 5)^2 + 3 = 1$$

- En este caso, la ecuación puede expresarse de la forma 4.1, pero no se trata de una ecuación incompleta.
- Sin embargo, dado que ya está factorizada en forma de un binomio al cuadrado una parte de la

ecuación, es más fácil resolverla a través de un despeje.

$$\begin{aligned}(x-5)^2+3 &= 1\\ (x-5)^2 &= 1-3=-2\\ x-5 &= \pm\sqrt{-2}\\ x &= 5\pm\sqrt{-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= 5\pm\sqrt{(-1)(2)}\\ x &= 5\pm\sqrt{-1}\sqrt{2}\\ x &= 5\pm i\sqrt{2}\end{aligned}$$

- Las soluciones de la ecuación son: $x_1=5+i\sqrt{2}$, y $x_2=5-i\sqrt{2}$.

Entonces, si encuentras una ecuación cuadrática completa que puedes factorizar fácilmente, te conviene, mejor, factorizarla y después hacer un despeje.

Este es el método que vamos a estudiar en la siguiente sección.

4.1.2 Método de factorización

Ahora utilizaremos la factorización que estudiamos en la sección *Factorización*.

Recuerda que una ecuación cuadrática se obtiene, algunas veces, debido a la multiplicación de un monomio por un binomio.

Ejemplo 1

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2-2x=0$$

- Aquí podemos aplicar la ley distributiva, porque la literal x aparece en ambos términos:

$$x^2-2x=x(x-2)=0$$

- Ahora tenemos el producto de dos cantidades: x es la primera y la segunda es $(x-2)$.
- Cuando multiplicamos estas cantidades, el resultado es igual a cero.
- Esto nos indica que al menos una de esas cantidades debe ser cero.
- Entonces, tenemos dos casos:
  - ✓ Bien $x=0$ .... *Primera solución*
  - ✓ Bien $x-2=0$, que sugiere: $x=2$ .... *Segunda solución*
- Entonces, las raíces de la ecuación son: $x=0$, y $x=2$.
- **Verificación:**

$$\begin{aligned}x^2-2x=0 &\quad\Rightarrow\quad (0)^2-2(0)=0\\ x^2-2x=0 &\quad\Rightarrow\quad (2)^2-2(2)=0\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$12\,x^2-21\,x=0$$

- En este caso, el factor común es: $3\,x$.
- Aplicamos la ley distributiva factorizándolo:

$$12\,x^2-21\,x=3x\,(4\,x-7)=0$$

- Observa que si multiplicas $3x\,(4\,x-7)$ obtienes el binomio que forma parte de la ecuación original.
- Para que el resultado de esta multiplicación sea cero, cualquiera de los factores debe ser cero, bien $3\,x=0$, bien $4\,x-7=0$.
- En el primer caso, es fácil concluir que $x=0$.
- Para el segundo caso, tenemos que despejar x:

$$4\,x-7=0 \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{7}{4}$$

- Entonces, las raíces de la ecuación cuadrática son: $x_1=0$, y $x_2=7/4$.
- **Verificación:**

$$\begin{array}{lcl} 12\,x^2-21\,x=0 & \Rightarrow & 12\,(0)^2-21\,(0)=0 \\ 12\,x^2-21\,x=0 & \Rightarrow & 12\left(\frac{7}{4}\right)^2-21\left(\frac{7}{4}\right)=0 \end{array}$$

Otras veces la ecuación se originó con la multiplicación de dos binomios.

Cuando sabemos qué binomios se multiplicaron para obtener la ecuación cuadrática, podemos fácilmente resolverla.

Ejemplo 3

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2+12\,x+35=0$$

- Empezamos observando que ahora tenemos un trinomio cuadrado del lado izquierdo de la igualdad.
- Así que tenemos que probar primero si se trata de un trinomio cuadrado perfecto.
- Para eso sacamos la mitad de 12 y lo elevamos al cuadrado: $6^2=36\neq 35$.
- Esto nos indica que el trinomio cuadrado no es perfecto.
- Ahora tenemos que encontrar dos números que sumados den 12 y multiplicados den 35.

- Esos número son 5 y 7.

$$\begin{aligned} 5+7 &= 12 \\ 5\times 7 &= 35 \end{aligned}$$

- Entonces, la ecuación puede escribirse como:

$$x^2+12x+35=(x+5)(x+7)=0$$

- Para que el resultado de la multiplicación sea igual a cero, al menos uno de los factores debe ser cero:

$$\begin{aligned} x+5=0 &\quad\Rightarrow\quad x=-5 \\ x+7=0 &\quad\Rightarrow\quad x=-7 \end{aligned}$$

- Así hemos encontrado las soluciones.
- Ahora hacemos la verificación:

$$\begin{aligned} x^2+12x+35=0 &\quad\Rightarrow\quad (-5)^2+12(-5)+35=0 \\ x^2+12x+35=0 &\quad\Rightarrow\quad (-7)^2+12(-7)+35=0 \end{aligned}$$

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2+8x+16=0$$

Ejemplo 4

- Vamos a factorizar el trinomio cuadrado.
- Primero verificamos si se trata de un trinomio cuadrado perfecto.
- La mitad de 8 es 4 y $4^2=16$.
- Esto nos indica que sí se trata de un cuadrado perfecto.

$$x^2+8x+16=(x+4)^2=0$$

- Ahora despejamos el valor de x:

$$\begin{aligned} (x+4)^2 &= 0 \\ x+4 &= 0 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

- En este caso, las dos raíces de la ecuación son la misma raíz: $x=-4$.
- Verificación:

$$x^2+8x+16=0 \quad\Rightarrow\quad (-4)^2+8(-4)+16=0$$

Ejemplo 5

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

- Es evidente que el trinomio $x^2 - 2x - 24$ no es cuadrado perfecto.
- Para factorizar el trinomio cuadrado debemos encontrar dos números que sumados den -2 y multiplicados den -24.
- Como el producto de los números es negativo, los números que buscamos tienen signos cambiados: uno es positivo y el otro negativo.
- Y como la suma de esos números es -2, el mayor debe ser negativo.
- Empezamos factorizando 24:
$$24 = 2^3 \cdot 3$$
- Podemos usar 6 y 4.
- Como el mayor de los números es positivo, tenemos -6 y 4.
- Estos números son los que estamos buscando, porque:
$$\begin{aligned} -6 + 4 &= -2 \\ (-6)(4) &= -24 \end{aligned}$$
- Entonces, la ecuación puede reescribirse como:
$$x^2 - 2x - 24 = (x-6)(x+4) = 0$$
- Y las raíces son: $x = 6$ y $x = -4$.
- **Verificación:**

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 24 = 0 \quad &\Rightarrow \quad (6)^2 - 2(6) - 24 = 0 \\ x^2 - 2x - 24 = 0 \quad &\Rightarrow \quad (-4)^2 - 2(-4) - 24 = 0 \end{aligned}$$

Recuerda, la factorización es una base importante.

Si no recuerdas la factorización, tendrás más problemas cuando tengas que resolver una ecuación cuadrática.

Ejemplo 6

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$2x^2 - x - 15 = 0$$

- En este caso, debemos factorizar un trinomio con coeficiente del término cuadrático distinto de 1.
- Así que posiblemente aplicaremos el caso: $(ax+b)(cx+d)$.

- Sabemos que $a \cdot c = 2$, así que $a = 2$ y $c = 1$.
- Ahora nos falta solamente encontrar los números b y c.
- Sabemos que el coeficiente del término lineal en este caso es: $bc + ad$.
- Y que el término independiente es: $bd = -15$.
- Así que tenemos dos opciones,
  - ✓ Bien $b = 3$, $d = 5$, con alguno de ellos negativo,
  - ✓ Bien $b = 5$, $d = 3$, con uno de ellos negativo.
- Probamos el primero de los casos:

$$\begin{aligned}(2x+3)(x-5) &= 2x^2 + (-10+3)x - 15\\ &= 2x^2 - 7x - 15\end{aligned}$$

- Siguiente caso: cambiamos solamente el signo de lugar:

$$\begin{aligned}(2x-3)(x+5) &= 2x^2 + (10-3)x - 15\\ &= 2x^2 + 7x - 15\end{aligned}$$

- Tampoco funcionó.
- Siguiente caso:

$$\begin{aligned}(2x-5)(x+3) &= 2x^2 + (6-5)x - 15\\ &= 2x^2 + x - 15\end{aligned}$$

- Observa que la única diferencia está en el signo del coeficiente del término lineal.
- Esto indica que solamente hay que cambiar los signos de posición en los binomios:

$$\begin{aligned}(2x+5)(x-3) &= 2x^2 + (-6+5)x - 15\\ &= 2x^2 - x - 15\end{aligned}$$

- Eso debimos saberlo del hecho de que el mayor era el negativo, dado que el resultado de la suma es un número negativo.
- Entonces, la ecuación queda:

$$2x^2 - x - 15 = (2x+5)(x-3) = 0$$

- Ahora es fácil encontrar las raíces: alguno de los factores se debe hacer cero para que el producto indicado sea igual a cero:

$$\begin{aligned}2x+5=0 \qquad &\Rightarrow \qquad x = -\frac{5}{2}\\ x-3=0 \qquad &\Rightarrow \qquad x = 3\end{aligned}$$

- Verificación:

$$\begin{aligned}2x^2 - x - 15 = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad 2\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - \left(-\frac{5}{2}\right) - 15 = 0\\ 2x^2 - x - 15 = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad 2(3)^2 - (3) - 15 = 0\end{aligned}$$

Ejemplo 7

Eunice compró cierto número de docenas naranjas por \$200.00 pesos. Si hubiera pagado \$5.00 pesos más por cada docena, hubiera recibido dos docenas menos por la misma cantidad de dinero. ¿Cuánto le costó cada docena?

- Para resolver este problema aplicado empezamos definiendo variables
  - ✓ n va a representar el número de docenas de naranjas que compró, y
  - ✓ p va a representar el precio que pagó por cada docena.
- Ahora sabemos que pagó en total \$200.00 pesos por las n docenas que compró, es decir,
- Si multiplico el precio de cada docena por el número de docenas de naranjas que compró, debo obtener 200:
$$p \cdot n = 200$$
- A nosotros nos piden encontrar el precio de cada docena de naranjas, así que vamos a despejar la otra variable:
$$n = \frac{200}{p}$$
Así, cuando sustituyamos, obtendremos una ecuación en términos de p, que es lo que deseamos calcular.
- Por otra parte, si hubiera pagado $p+5$ (cinco pesos más por cada docena), hubiera recibido $n-2$ (dos docenas menos) por la misma cantidad de dinero, es decir:
$$(n-2)(p+5) = 200$$
- En esta ecuación tenemos dos incógnitas.
- Para reducirla a una incógnita sustituimos el despeje de la primera ecuación que encontramos:
$$(n-2)(p+5) = 200 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{200}{p} - 2\right)(p+5) = 200$$
- Ahora vamos a simplificar la ecuación.
- Para eso, multiplicamos ambos lados de la ecuación por p:
$$\begin{aligned} p\left(\frac{200}{p} - 2\right)(p+5) &= 200\,p \\ (200 - 2\,p)(p+5) &= 200\,p \\ \cancel{200\,p} + 1\,000 - 2\,p^2 - 10\,p &= \cancel{200\,p} \\ -2\,p^2 - 10\,p + 1\,000 &= 0 \\ 2\,p^2 + 10\,p - 1\,000 &= 0 \\ p^2 + 5\,p - 500 &= 0 \end{aligned}$$
- Ahora debemos factorizar esta ecuación cuadrática.
- Buscamos dos números que sumados den 5 y multiplicados den 500.

- Esos números son: 25 y -20:

$$\begin{aligned} p^2+5p-500 &= 0 \\ (p+25)(p-20) &= 0 \end{aligned}$$

- Nosotros sabemos que el precio de cada docena debe ser un número positivo, por eso: $p=20$.
- Entonces, compró: $n=200/20=10$ docenas de naranjas.
- Vamos a comprobar el resultado:

✓ Si compró $n=10$ docenas de naranjas a \$20.00 pesos cada una, pagó $(10)(20)=200$ pesos.

✓ Si hubiera pagado \$5.00 pesos más por cada docena hubiera pagado \$25.00 pesos por cada una, y hubiera recibido $n-2=8$ docenas de naranjas.

✓ Por eso hubiera pagado: $(8)(25)=200$ pesos.

Comentario

Recuerda que no todos los trinomios cuadrados pueden factorizarse usando números enteros.

Algunas veces se requieren de números irracionales. Esos casos requieren de otro método para su solución.

Este otro método de solución es el caso más general de ecuación cuadrática, porque incluye todos los posibles casos de raíces para este tipo de ecuaciones.

Con este nuevo método podremos clasificar las raíces de las ecuaciones cuadráticas en tres casos. Cada uno de esos casos está relacionado con un número que se conoce como discriminante, porque de cierta manera discrimina entre las distintas raíces de la ecuación cuadrática.

El discriminante es parte de una fórmula que ya debes conocer, si es que pudiste resolver el último reto.

...y si no la conoces, de cualquier manera la deberás aprender.

Se trata de la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, es decir, la fórmula «*mágica*» que resuelve cualquier ecuación cuadrática.

Eso es lo que estudiaremos en la siguiente sección.

4.1.3 Método de fórmula general

Ahora vamos a utilizar el método infalible.

La siguiente fórmula, que llamaremos «*fórmula general*» nos ayudará a resolver cualquier ecuación cuadrática.

Fórmula General

La fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado es la siguiente:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

donde a,b,c son los coeficientes de la ecuación cuadrática: $ax^2+bx+c=0$.

Definición 1

Para resolver ecuaciones de segundo grado usando la fórmula general, primero debemos identificar los valores de los coeficientes.

Ejemplo 1

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2+2x-1=0$$

- Observa que en este caso no podemos hacer la factorización, porque:
  - ✓ El trinomio cuadrado **no** es perfecto, y
  - ✓ No hay dos números enteros que sumados den 2 y multiplicados den -1.
- En estos casos, la fórmula general es la que nos salva.
- Los coeficientes en este caso son: $a=1$, $b=2$, y $c=-1$.
- Vamos a sustituir los coeficientes en la fórmula y después realizamos los cálculos que quedan indicados.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\ &= \frac{-(2)\pm\sqrt{(2)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}\\ &= \frac{-2\pm\sqrt{4-(-4)}}{2}\\ &= \frac{-2\pm\sqrt{8}}{2} \end{aligned}$$

- Podemos ver que el radicando puede ser factorizado como $8=2^3=2\cdot 2^2$, y después, simplificar:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2\pm\sqrt{2\cdot 2^2}}{2}\\ &= \frac{-2\pm 2\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

- Y ahora podemos simplificar, dividiendo entre dos:

$$\begin{aligned} x= &= -\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\pm\frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}}\\ &= -1\pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

- Y las soluciones de la ecuación cuadrática son:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1+\sqrt{2}\\ x_2 &= -1-\sqrt{2} \end{aligned}$$

- Para verificar que las soluciones de la ecuación cuadrática son correctas podemos utilizar el método de factorización.
- Al sumar las raíces debemos obtener el negativo del coeficiente del término lineal, y al multiplicarlos, debemos obtener término independiente.

$$\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 = -2 & \Rightarrow & \left(-1+\cancel{\sqrt{2}}\right)+\left(-1-\cancel{\sqrt{2}}\right) \\
(x_1)(x_2) = -1 & \Rightarrow & \left(-1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(-1-\sqrt{2}\right)
\end{array}$$

En la comprobación tanto la suma de las raíces como la multiplicación son muy sencillas.

Para realizar la multiplicación de una manera sencilla aplica el producto de binomios conjugados: el resultado es una diferencia de cuadrados.

Reto 1

Explica por qué la suma de las raíces debe ser igual al negativo del coeficiente del término lineal

Ejemplo 2

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$5x^2 + 57x - 36 = 0$$

- Esta ecuación sí se puede resolver por el método de factorización, pero sería muy laborioso.
- Preferimos usar el método de la fórmula general:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
&= \frac{-(57) \pm \sqrt{(57)^2 - 4(5)(-36)}}{2(5)} \\
&= \frac{-57 \pm \sqrt{3249 - (-720)}}{10} \\
&= \frac{-57 \pm \sqrt{3969}}{10}
\end{aligned}$$

- El número $3969 = 63^2$, así que podemos simplificar el radicando:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-57 \pm \sqrt{63^2}}{10} \\
&= \frac{-57 \pm 63}{10}
\end{aligned}$$

- Ahora encontramos las dos raíces:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-57+63}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \\
x_2 &= \frac{-57-63}{10} = \frac{-120}{10} = -12
\end{aligned}$$

- Esto quiere decir que podemos reescribir la ecuación de la siguiente manera equivalente:

$$(x+12)\left(x - \frac{3}{5}\right) = 0$$

- Y al multiplicar ambos lados de la igualdad por 5, obtenemos una ecuación equivalente que no incluye fracciones:
$$(x+12)(5x-3)=0$$

- Ahora que conoces la factorización, se te queda como ejercicio multiplicar los binomios para verificar que las ecuaciones son equivalentes y después realizar la comprobación sustituyendo las raíces en la ecuación.

Algunas veces encontraremos ecuaciones que al simplificarse, se reducen a una ecuación cuadrática.

En estos casos, después de haber expresado la ecuación en la forma (4.1), debemos reconocerla como tal y proceder a su solución por cualquiera de los métodos que ya hemos estudiado.

Ejemplo 3

Resuelve la siguiente ecuación:
$$\frac{5}{x+2}-\frac{1}{x-2}=3$$

- Esta ecuación, para empezar, ni siquiera parece cuadrática.
- Vamos a simplificarla, para ver si podemos resolverla usando la fórmula general.
- Para esto, vamos a multiplicar ambos lados de la igualdad por ambos denominadores:
$$\begin{aligned}
\frac{5\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+2}}-\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} &= 3(x+2)(x-2)\\
5(x-2)-(x+2) &= 3(x^2-4)\\
5x-10-x-2 &= 3x^2-12\\
-3x^2+4x &= 0
\end{aligned}$$

- Esta ecuación cuadrática puede resolverse fácilmente utilizando el método de factorización.
- Sin embargo, vamos a utilizar la fórmula general:
$$\begin{aligned}
x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
&= \frac{-(4)\pm\sqrt{(4)^2-4(-3)(0)}}{2(-3)}\\
&= \frac{-4\pm\sqrt{16-(0)}}{-6}\\
&= \frac{-4\pm\sqrt{16}}{-6}
\end{aligned}$$

- Como $\sqrt{16}=4$, tenemos:
$$\begin{aligned}
x &= \frac{-4\pm 4}{-6}\\
x_1 &= \frac{-4+4}{-6}=0\\
x_2 &= \frac{-4-4}{-6}=\frac{-8}{-6}=\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

- Ahora tú realiza la comprobación.

Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{8}{x-1} - \frac{1}{x+1} = 1$$

Ejemplo 4

- De nuevo, simplificamos la ecuación, multiplicando ambos lados de la igualdad por ambos denominadores:

$$\begin{aligned}
\frac{8(\cancel{x-1})(x+1)}{\cancel{x-1}} - \frac{(x-1)(\cancel{x+1})}{\cancel{x+1}} &= (x-1)(x+1)\\
8(x+1)-(x-1) &= x^2-1\\
8x+8-x+1 &= x^2-1\\
7x+9 &= x^2-1\\
-x^2+7x+10 &= 0
\end{aligned}$$

- Pero todavía podemos multiplicar por -1 ambos lados de la anterior igualdad y obtener:

$$x^2-7x-10=0$$

- Ahora podemos aplicar la fórmula general:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
&= \frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4(1)(-10)}}{2(1)}\\
&= \frac{7\pm\sqrt{49-(-40)}}{2}\\
&= \frac{7\pm\sqrt{89}}{2}
\end{aligned}$$

- Ahora podemos encontrar ambos valores de las raíces:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{7+\sqrt{89}}{2}\\
x_2 &= \frac{7-\sqrt{89}}{2}
\end{aligned}$$

- Se te queda la comprobación como ejercicio.

Algunas ecuaciones que no son cuadráticas, se pueden transformar en ecuaciones cuadráticas y resolverse usando los métodos que ya hemos estudiado.

El siguiente ejemplo es una muestra de esos casos.

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$2x^4+9x^2-5=0$$

Ejemplo 5

- Empezamos notando que esta ecuación tiene solamente exponentes pares.
- Esto nos sugiere definir: $u = x^2$, lo cual implica: $u^2 = x^4$.
- Al sustituir estos valores en la ecuación obtenemos una nueva ecuación equivalente:

$$2\,u^2 + 9\,u - 5 = 0$$

- Ahora tenemos una ecuación cuadrática que podemos resolver utilizando la fórmula general:

$$\begin{aligned} u &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \\ &= \frac{-(9) \pm \sqrt{(9)^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)} \\ &= \frac{-9 \pm \sqrt{81 - (-40)}}{4} \\ &= \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{4} \end{aligned}$$

- Sabemos que $\sqrt{121} = 11$, entonces,

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{-9+11}{4} = \frac{1}{2} \\ u_2 &= \frac{-9-11}{4} = -5 \end{aligned}$$

- Pero $u_1 = x_1^2$, es decir,

$$\begin{aligned} x_1^2 = \frac{1}{2} \qquad &\Rightarrow \qquad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Rightarrow \qquad x_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Rightarrow \qquad x_{12} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- Y por otra parte,

$$\begin{aligned} x_2^2 = -5 \qquad &\Rightarrow \qquad x = \pm\sqrt{-5} = \pm\, i\,\sqrt{5} \\ &\Rightarrow \qquad x_{21} = i\,\sqrt{5} \\ &\Rightarrow \qquad x_{22} = -i\,\sqrt{5} \end{aligned}$$

- En este caso, debido a que la ecuación es de cuarto grado, tiene cuatro raíces.

Es importante observar que una ecuación de cuarto grado tiene cuatro raíces. Igualmente, una ecuación de tercer grado tiene tres raíces y una ecuación de segundo grado siempre tiene dos raíces.

Seguramente te preguntas: «*¿por qué algunas ecuaciones de segundo grado tienen una sola raíz?*» Porque en estos casos las dos raíces son iguales.

Por ejemplo, de la ecuación: $(x-1)^2 = 0$, tiene dos raíces idénticas, siendo ambas $x = 1$.

Algunos problemas que no parecen tener relación con las ecuaciones cuadráticas pueden expresarse como una ecuación cuadrática a través de una transformación.

Resuelve:

$$\sqrt[5]{x^2} + 8\,\sqrt[5]{x} = 9$$

Ejemplo 6

- Vamos a hacer una transformación.
- Vamos a definir $u = \sqrt[5]{x}$, así: $u^2 = \sqrt[5]{x^2}$.
- Por lo que la ecuación puede transformarse como:

$$\sqrt[5]{x^2} + 8\,\sqrt[5]{x} = 9 \qquad \Rightarrow \qquad u^2 + 8\,u = 9$$

- Ahora podemos resolver esta ecuación cuadrática por factorización o por fórmula general.
- Aplicamos la fórmula general:

$$\begin{aligned} u &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \\ &= \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)} \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{64 - (-36)}}{2} \\ &= \frac{-8 \pm \sqrt{100}}{2} \end{aligned}$$

- Ahora calculamos los valores de las dos raíces de la ecuación transformada:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{-8+10}{2} = 1 \\ u_2 &= \frac{-8-10}{2} = -9 \end{aligned}$$

- **Método de factorización:**

$$u^2 + 8\,u - 9 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (u+9)(u-1) = 0$$

- Las raíces son inmediatas a partir de este método.
- Ahora volvemos a la definición que hicimos: $u = \sqrt[5]{x}$ y sustituimos el valor de u para encontrar el verdadero valor de x:

$$\begin{aligned} 1 = \sqrt[5]{x} \qquad &\Rightarrow \qquad x = 1^5 = 1 \\ -9 = \sqrt[5]{x} \qquad &\Rightarrow \qquad x = (-9)^5 = -59049 \end{aligned}$$

- Y esas dos son las raíces que queríamos calcular.

Observa que en el ejemplo anterior aplicamos algunas de las leyes de los exponentes y los radicales para transformar la ecuación en una que sí supieramos cómo resolver.

En otros problemas tendremos que aplicar además productos notables y algunas veces factorización.

Ejemplo 7

Resuelve y verifica la raíz positiva de:

$$\sqrt{3x+1}+\frac{35}{\sqrt{3x+1}}=3\sqrt{x}$$

- En este ejercicio debes recordar las leyes de los exponentes y de los radicales y los productos notables.
- Si no recuerdas bien estos tema, es una buena idea estudiarlos de nuevo.
- En este caso, vamos a multiplicar ambos lados de la ecuación por $\sqrt{3x+1}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{3x+1}\left(\sqrt{3x+1}+\frac{35}{\sqrt{3x+1}}\right) &= 3\sqrt{x}\sqrt{3x+1}\\
(3x+1)+35 &= 3\sqrt{x(3x+1)}\\
\frac{3x+36}{3} &= \frac{3\sqrt{x(3x+1)}}{3}\\
x+12 &= \sqrt{x(3x+1)}
\end{aligned}$$

- Ahora elevamos al cuadrado ambos lados de la igualdad:

$$\begin{aligned}
(x+12)^2 &= \left(\sqrt{x(3x+1)}\right)^2\\
x^2+24x+144 &= x(3x+1)\\
x^2+24x+144 &= 3x^2+x\\
-2x^2+23x+144 &= 0\\
2x^2-23x-144 &= 0
\end{aligned}$$

- Ahora aplicamos la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\
&= \frac{-(-23)\pm\sqrt{(-23)^2-4(2)(-144)}}{2(2)}\\
&= \frac{23\pm\sqrt{529-(-1152)}}{4}\\
&= \frac{23\pm\sqrt{1681}}{4}
\end{aligned}$$

- Como $\sqrt{1681}=41$, tenemos:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{23+41}{4}=\frac{64}{4}=16\\
x_2 &= \frac{23-41}{4}=\frac{-18}{4}=-\frac{9}{2}=-4.5
\end{aligned}$$

- Finalmente, vamos a probar la raíz positiva:

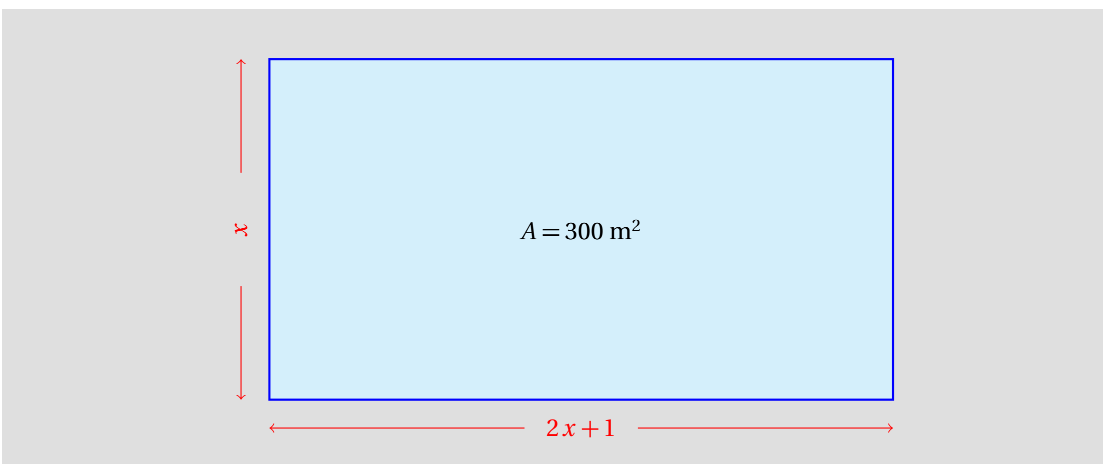
$$\begin{aligned}
\sqrt{3x+1}+\frac{35}{\sqrt{3x+1}} &= 3\sqrt{x}\\
\sqrt{3(16)+1}+\frac{35}{\sqrt{3(16)+1}} &= 3\sqrt{16}\\
\sqrt{49}+\frac{35}{\sqrt{49}} &= 3(4)\\
7+\frac{35}{7} &= 12\\
7+5 &= 12
\end{aligned}$$

- Y 16 satisface la ecuación, por lo que es una raíz de la misma.

Ahora vamos a resolver algunos problemas cotidianos con el apoyo de las ecuaciones cuadráticas.

El largo de un terreno es un metro mayor al doble del ancho. Su área es de 300 m^2. ¿Cuáles son sus dimensiones? **Ejemplo 8**

- Sabemos que el largo es un metro más largo que el doble del ancho.
- Vamos a realizar un dibujo para representar la información del problema:



- Si x es su ancho, el largo será: $2x+1$.
- Y su área es de 300 m^2, entonces la ecuación que modela esta situación es:

$$\begin{aligned}
\text{(ancho)(largo)} &= \text{Área del terreno}\\
x(2x+1) &= 300
\end{aligned}$$

- Ahora tratamos de simplificar la ecuación:

$$x(2x+1)=300 \qquad \Rightarrow \qquad 2x^2+x-300=0$$

- Ahora aplicamos la fórmula general:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \\
&= \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(2)(-300)}}{2(2)} \\
&= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - (-2400)}}{4} \\
&= \frac{-1 \pm \sqrt{2401}}{4}
\end{aligned}
$$

- Ahora podemos encontrar las raíces de la ecuación:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-1 + \sqrt{2\,401}}{4} = \frac{-1 + 49}{4} = \frac{48}{4} = 12 \\
x_2 &= \frac{-1 - \sqrt{2\,401}}{4} = \frac{-1 - 49}{4} = -\frac{50}{4} = -12.5
\end{aligned}
$$

- Esto nos indica que el ancho del terreno original era de 12 metros.

- El largo es de: $(12)(2) + 1 = 25$.

- Entonces, el área del terreno es de: $(12)(25) = 300\ \mathrm{m}^2$.

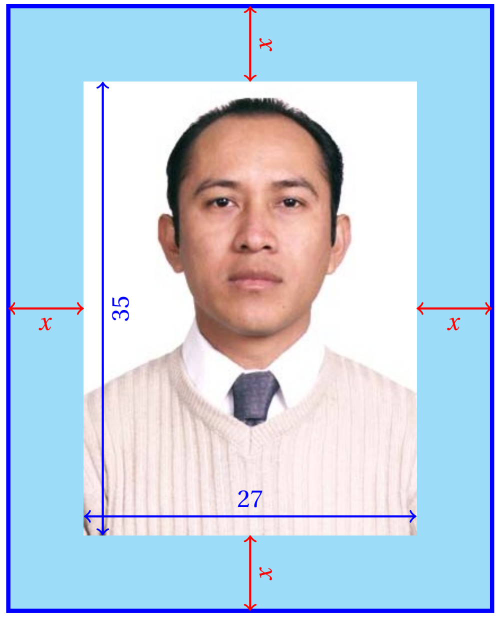
- La solución satisface las condiciones del problema, por tanto es correcta.

- Observa que la raíz: $x = -12.5$ satisface la ecuación, pero **no** es la solución del problema porque el ancho del terreno no puede ser un número negativo.

Ejemplo 9

Una fotografía de 27 cm × 35 cm se va a enmarcar. Para esto, se le colocará alrededor una banda de papel especial para adornarla. El ancho del papel alrededor de la fotografía es constante. ¿Cuánto debe medir este ancho para que el aumento en el área total de la fotografía con su marco de papel sea de 335 cm^2?

- Empezamos realizando una figura para tener una mejor idea del problema:



- De la figura se ve inmediatamente que la fotografía con marco tendrá ahora $(27+2x)$ cm de ancho y $(35+2x)$ cm de altura.
- Entonces, el área final será: $(27+2x)(35+2x)$.
- Necesitamos que el área aumente en 335 cm^2.
- El área de la fotografía sin el marco es de: $27\times 35 = 945$ cm^2.
- Así que el área de la fotografía con marco será de: $945+335 = 1\,280$ cm^2.
- La ecuación que modela esta situación es:

$$(27+2x)(35+2x) = 1\,280$$

- Vamos a desarrollar el producto de los binomios para poder después resolverla por el método de fórmula general:

$$\begin{aligned}(27+2x)(35+2x) &= 1\,280\\ 945+124x+4x^2 &= 1\,280\\ 4x^2+124x-335 &= 0\end{aligned}$$

- Ahora aplicamos la fórmula general para resolver esta ecuación:

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\\ &= \frac{-(124)\pm\sqrt{(124)^2-4(4)(-335)}}{2(4)}\\ &= \frac{-124\pm\sqrt{15376-(-5360)}}{8}\\ &= \frac{-124\pm\sqrt{20736}}{8}\end{aligned}$$

- Finalmente, sabiendo que $\sqrt{20\,736} = 144$, podemos escribir:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{-124 \pm 144}{8} \\
x_1 &= \frac{-124+144}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = 2.5 \\
x_2 &= \frac{-124-144}{8} = -\frac{268}{8} = -\frac{67}{2} = -33.5
\end{aligned}
$$

- Pero no es posible agregar -33.5 cm al ancho y largo de la fotografía.
- Es decir, la única solución de la ecuación que tiene sentido físico es: $x = 2.5$ cm.
- Ahora vamos a comprobar que la solución sea correcta.

Comentario

✓ Inicialmente las dimensiones de la fotografía eran de 27×35 cm ^{2}.

✓ Como se agregaron 2.5 cm más, las dimensiones de la fotografía con su marco son ahora de: $27 + 2(2.5) = 32$ cm por $35 + 2(2.5) = 40$ cm.

✓ El área de la fotografía con su marco es ahora de: $32 \times 40 = 1\,280$ cm^2.

Los problemas aplicados de las ecuaciones cuadráticas generalmente requieren de mucho cuidado al hacer sustituciones, porque algunas veces ahí es donde se cometen con mayor frecuencia los errores a la hora de resolverlos.

Ten cuidado con eso.

4.1.4 Método Gráfico

El último método que estudiaremos es el más sencillo.

Se trata de considerar a la ecuación como una máquina que transforma los números. Para eso, crearemos una función.

Definición 1

Función (Definición Informal)

Es una máquina en forma de una fórmula que nos ayuda a transformar los números. Nosotros le damos un valor y la máquina nos devuelve a lo más otro valor. Es posible que nosotros le demos un valor y ella no nos devuelva valor alguno, pero ***no*** *es posible que cuando le demos un valor la máquina nos devuelva más de uno.*

Los valores que la máquina puede transformar, o sea, los valores que nosotros le vamos a dar a la máquina forman un conjunto que se llama dominio de la función. Los valores que la máquina nos devuelve forman otro conjunto que se llama rango o contradominio de la función.

Para entender mejor este concepto, puedes ver el diagrama que estudiamos en la sección **??** en la página **??**.

Algunos ejemplos de funciones son:

✓ $f(x) = 1 - 2x$

✓ $g(x) = x^2$

✓ $h(x) = \sqrt{x+1}$

✓ $y = \dfrac{1}{x}$

A partir de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, creamos la función: $y = ax^2 + bx + c$.

Vamos a graficar esta función y después vamos a encontrar los puntos donde la gráfica de la función corta al eje x, porque precisamente en el eje x, $y = 0$.

Ejemplo 1

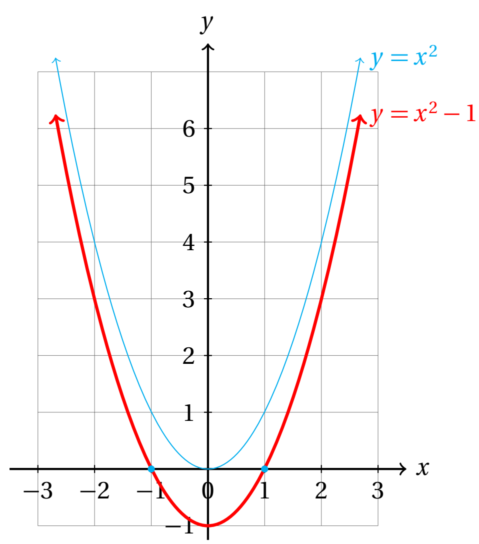
Por el método gráfico, resuelve la ecuación:

$$x^2 - 1 = 0$$

- Lo que deseamos encontrar son los valores de x para los cuales $x^2 - 1$ se hace cero.
- Pero $x^2 - 1 = 0$ en palabras nos dice: «*pensé un número, lo multipliqué por sí mismo, le resté uno y obtuve cero*».
- Entonces, antes de restar 1, tenía 1, porque la diferencia fue cero.

$$x^2 = 1$$

- Ahora la ecuación transformada dice: «*pensé un número, cuando lo multipliqué por sí mismo obtuve uno*».
- Aquí la solución inmediata es $x = 1$.
- Pero si piensas un poco más, te darás cuenta que $x = -1$ también es solución, porque: $(-1)^2 = 1$.
- Los valores que deseabamos encontrar son: $x = 1$ y $x = -1$.
- Ahora podemos graficar la función: $y = x^2 - 1$.



- De la gráfica podemos ver que las intersecciones sobre el eje x son:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

- Nosotros buscamos los puntos donde la gráfica corta al eje x, porque sobre este eje $y = 0$, y tenemos en esos casos, la solución de la ecuación.

Observa que este método solamente funciona cuando tenemos una ecuación que tiene soluciones reales.

Porque si la gráfica de la función **no** corta al eje x, entonces no podremos decidir qué valores de x hacen que la ecuación se haga cero.

Ejemplo 2

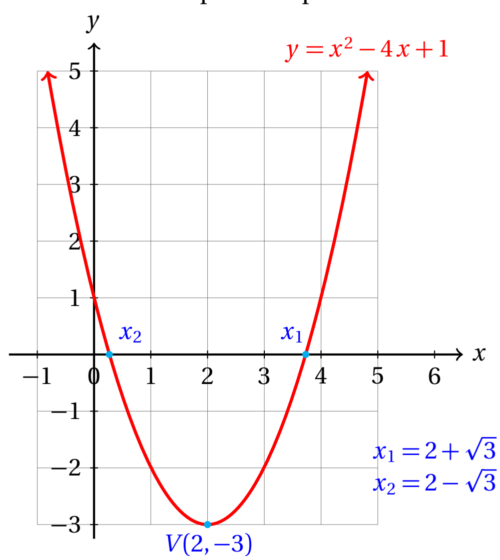
Resuelve la siguiente ecuación cuadrática:

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

por el método gráfico.

- Empezamos graficando la función: $y = x^2 - 4x + 1$
- Para graficar, empezamos calculando las coordenadas de los puntos a partir de unos valores de x:

x	$x^2 - 4x + 1$
0	1
1	-2
2	-3
3	-2
4	1



- Como el vértice se encuentra en el punto $(2, 3)$, podemos escribir la ecuación de la forma:

$$x^2 - 4x + 1 = (x - 2)^2 - 3 = 0$$

- Para verificarlo, puedes desarrollar el binomio al cuadrado.
- ¿Cómo obtuvimos este resultado? Usamos el método de factorización.
- En este caso completamos el cuadrado perfecto:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 1 &= (x^2 - 4x + 1) + (4 - 4) \\ &= (x^2 - 4x + 4) + (1 - 4) \\ &= (x - 2)^2 - 3 \end{aligned}$$

- Observa que si $x = 2$, el binomio elevado al cuadrado tiene su mínimo valor: $(x - 2)^2 = 0$.
- Y en ese caso, la gráfica pasa por el punto $(2, -3)$. Este punto es el vértice de la parábola.

- Para resolver la ecuación podemos utilizar el método de despeje:

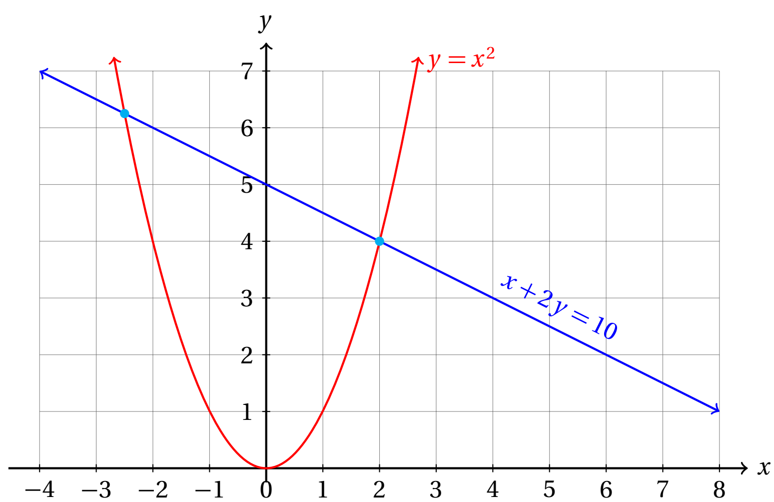
$$\begin{array}{rcl} (x-2)^2-3=0 & \Rightarrow & (x-2)^2=3 \\ x-2=\pm\sqrt{3} & \Rightarrow & x=2\pm\sqrt{3} \end{array}$$

- Estas son las raíces que se muestran en la gráfica de la función que le corresponde a la ecuación.

Algunas veces, en geometría algunos problemas se resuelven a través de ecuaciones cuadráticas.

Encuentra los puntos donde se intersectan la recta: $x+2y=10$ y la parábola: $y=x^2$. **Ejemplo 3**

- Para resolver este problema empezamos graficando ambas ecuaciones en un mismo plano cartesiano:



- Hasta aquí, parece que uno de los puntos de intersección es: $(2,4)$, pero vamos a probarlo de manera algebraica.
- En los puntos de intersección de ambas gráficas, los valores de las coordenadas de esos puntos deben coincidir para ambas ecuaciones.
- Esto nos permite igualar alguna de las variables, por ejemplo: y.
- Despejamos esta variable de la primera ecuación:

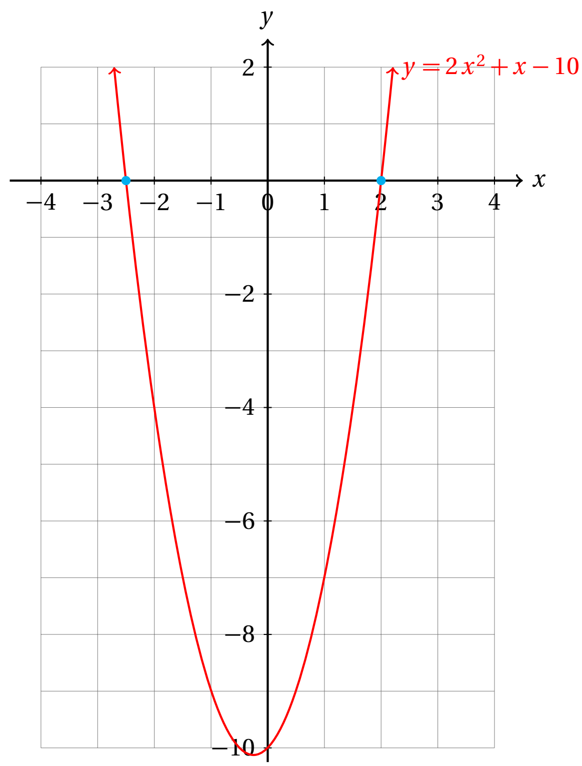
$$y=-\frac{x}{2}+5$$

- Ahora, igualamos con la otra ecuación, que ya nos dieron despejada:

$$\begin{aligned} y=x^2 &= -\frac{x}{2}+5 \\ x^2+\frac{x}{2}-5 &= 0 \\ 2x^2+x-10 &= 0 \end{aligned}$$

- Para resolver el problema tenemos que encontrar las soluciones de esta ecuación.

- Vamos a utilizar, de nuevo, el método gráfico:



- Ahora podemos usar la fórmula general para encontrar las raíces de esta ecuación con mayor precisión:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(-10)}}{2(2)} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{-1 \pm 9}{4} \end{aligned}$$

- Entonces,

$$x_1 = \frac{-1+9}{4} = 2 \qquad \text{y} \qquad x_2 = \frac{-1-9}{4} = -\frac{5}{2}$$

- Para encontrar las coordenadas de y que le corresponden a cada uno de los puntos podemos utilizar cualquiera de los despejes:

$$y = x^2 \qquad \Rightarrow$$

$$y_1 = (2)^2 = 4 \qquad \text{y} \qquad y_2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

- Entonces, los puntos donde se intersectan las gráficas, es decir, la solución del sistema es: $(2,4)$ y $\left(-\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$.

Como se puede concluir del ejemplo anterior, el método gráfico es muy sencillo de utilizar, pero algunas veces no nos da información precisa.

Con él podemos saber aproximadamente cuál es la solución del sistema de ecuaciones, o de la ecuación cuadrática.

A partir de los ejemplos anteriores podemos interpretar las raíces de una ecuación cuadrática.

Cuando resolvemos la ecuación cuadrática: $a\,x^2+b\,x+c=0$, en realidad estamos encontrando los puntos donde la función: $y=a\,x^2+b\,x+c$ corta al eje x.

Para calcular las raíces siempre podemos utilizar la fórmula general:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}$$

El símbolo $\pm$ indica que hay dos valores:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a} &= \frac{-b}{2\,a}+\frac{\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}\\
x_2 &= \frac{-b-\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a} &= \frac{-b}{2\,a}-\frac{\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}
\end{aligned}$$

Si calculamos el promedio de estos valores, obtenemos:

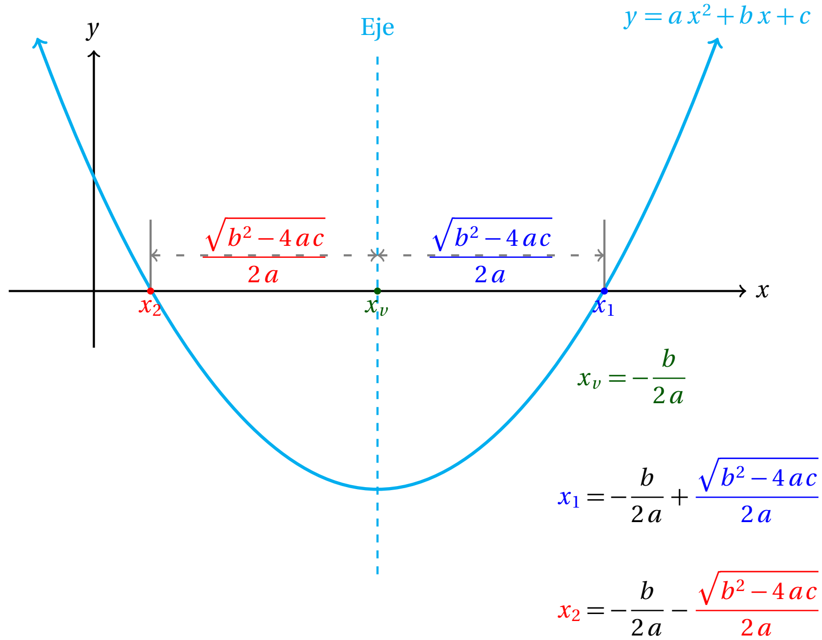
$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{x_1+x_2}{2}\\
&= \frac{\dfrac{-b}{2\,a}+\cancel{\dfrac{\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}}+\dfrac{-b}{2\,a}-\cancel{\dfrac{\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}}}{2}\\
&= \frac{\left(\dfrac{-\cancel{2}b}{\cancel{2}a}\right)}{2}=\frac{-b}{2\,a}
\end{aligned}$$

Esto indica que el promedio de las raíces es $\bar{x}=x_v=-b/(2\,a)$.

Observa que x_1 está a la derecha porque al valor x_v le sumamos una cantidad positiva, e igual a:

$$\frac{\sqrt{b^2-4\,a\,c}}{2\,a}$$

Por otra parte, x_2 está a la izquierda porque restamos esa misma cantidad a x_v. Podríamos decir que esta es la razón por la que x_v está a la misma distancia de las raíces x_1 y x_2. Sin embargo, la verdadera razón está justificada en la simetría de la parábola, que es la que nos permitió calcular $x_v=\bar{x}$ a partir del promedio de x_1 y x_2.



En la gráfica anterior se ha supuesto que la ecuación tiene dos raíces reales. Esto es así porque la gráfica corta al eje x en dos puntos.

Sin embargo, también es posible que la parábola toque en solamente un punto al eje. En este caso, ambas raíces son iguales, debido a que $b^2 - 4\,a\,c = 0$.

Un posible tercer caso ocurre cuando la parábola **no** corta al eje x. Esto ocurrirá en caso de que $b^2 - 4\,a\,c < 0$.

Debido a que el número $b^2 - 4\,a\,c$ nos indica qué ocurre con las raíces de la ecuación cuadrática, se le ha dado un nombre especial: **discriminante**.

Definición 2

DISCRIMINANTE

El discriminante de la ecuación cuadrática: $a\,x^2 + b\,x + c = 0$ es el número:

$$D = b^2 - 4\,a\,c$$

Esto nos origina tres casos para las raíces de una ecuación cuadrática:

- ✓ $D > 0$, las dos raíces son números reales distintos.
- ✓ $D = 0$, las dos raíces se repiten, y son iguales a: $x = -b/(2\,a)$.
- ✓ $D < 0$, las dos raíces son números complejos.

El discriminante nos ayuda a conocer la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática sin necesidad de resolverla.

Basta con conocer el signo del discriminante para conocer el tipo de raíces que tiene la ecuación cuadrática que estamos estudiando.

Ejemplo 4

Resuelve la siguiente ecuación cuadrática por el método gráfico:

$$x^2 - 4\,x + 4 = 0$$

- Empezamos calculando el discriminante para averiguar la naturaleza de las raíces:

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(4) = 0$$

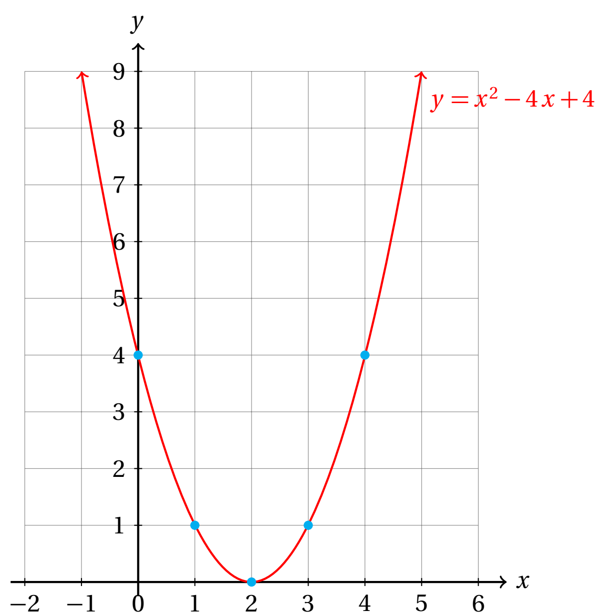
- Esto nos indica que la ecuación tiene las dos raíces repetidas.
- Calculamos el valor de la raíz (repetida) usando $x_v = -b/(2a)$:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2$$

- Entonces, la raíz de la ecuación cuadrática es: $x = 2$.
- Para verificar que la raíz es correcta, basta sustituir $x = 2$ en la ecuación:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (2)^2 - 4(2) + 4 = 0$$

- Ahora graficamos la función: $y = x^2 - 4x + 4$



Ahora puedes verificar la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática antes de resolverla.

Ejemplo 5

Identifica la naturaleza de las raíces e indica cuántas tiene cada una de las siguientes ecuaciones a partir del cálculo del discriminante.

- Llena la siguiente tabla:

Ecuación $ax^2 + bx + c = 0$	**Discriminante** $b^2 - 4ac$	**Número de raíces**	**Naturaleza**
$x^2 - 5x + 6 = 0$	1	2	Reales
$x^2 + 6x + 21 = 0$	−48	2	Complejas
$x^2 - 6x + 9 = 0$	0	1	Real
$5x^2 + 3x + 2 = 0$	−31	2	Complejas
$x^2 + 3x + 2 = 0$	1	2	Reales
$x^2 - 3x - 12 = 0$	57	2	Reales

Estrictamente hablando, una ecuación cuadrática siempre tiene dos raíces.

Cuando encontramos solamente una, lo que en realidad está pasando es que ambas raíces son iguales.

Por ejemplo, en el caso de la ecuación $x^2+2x+1=0$, podemos reescribirla de la siguiente forma:

$$(x+1)^2=(x+1)(x+1)=0$$

Obviamente, para que el producto indicado sea igual a cero, necesariamente x debe ser igual a -1.

Como el factor $(x+1)$ se repite dos veces, ambas raíces son iguales. Debido a esto decimos que la raíz tiene multiplicidad 2.

Definición 3

MULTIPLICIDAD
Sea x_0 una de las raíces de una ecuación. Si esta raíz aparece k veces como raíz de la ecuación considerada, decimos que esa raíz tiene multiplicidad k.

Ahora indica la multiplicidad de las raíces de las ecuaciones del ejemplo anterior.

Ejemplo 6

Varios amigos decidieron comprar un boleto de una rifa [**?**] cooperando en partes iguales. Cuando el papá de Adán se enteró, les pidió oportunidad de arriesgar su dinero junto con el de ellos y aceptaron. Por esto cada uno de los demás pagó $10.00 pesos menos. ¿Cuántas personas cooperaron para comprar ese boleto que costaba $1 320.00 pesos?

- Sabemos que n amigos en total, más el papá de Adán cooperaron para comprar el boleto.
- Y que el boleto costaba $1 320.00 pesos
- Si el papá de Adán no hubiera cooperado, cada uno debería colaborar con:

$$\frac{1\,320}{n}$$

- Pero ahora no son en total n personas, sino $n+1$, con lo que cada uno arriesgó:

$$\frac{1\,320}{n+1}$$

- La diferencia entre estos dos valores es igual a $10.00 pesos, la cantidad que ahorraron después que el papá de Adán ingresó al grupo:

$$\frac{1\,320}{n}-\frac{1\,320}{n+1}=10$$

- Para saber cuántas personas cooperaron $(n+1)$, primero debemos resolver la ecuación anterior.
- Es importante hacer notar que al resolver la ecuación encontraremos el valor del número de amigos que decidieron comprar el boleto, n. Este número no incluye al papá de Adán, así que tendrán que sumar 1 al resultado de la ecuación.
- Para resolver la ecuación multiplicamos en ambos lados de la igualdad por $n(n+1)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1\,320}{n}-\frac{1\,320}{n+1} &= 10\\
1\,320(n+1)-1\,320\,n &= 10\,n(n+1)\\
\cancel{1\,320\,n}+1\,320-\cancel{1\,320\,n} &= 10\,n(n+1)\\
1\,320 &= 10\,n(n+1)\\
132 &= n(n+1)
\end{aligned}$$

- **Primer Método.**
- Desarrollamos el producto que quedó indicado a la derecha de la igualdad:

$$\begin{aligned} n(n+1) &= 132 \\ n^2+n-132 &= 0 \end{aligned}$$

- Ahora debemos resolver la ecuación cuadrática utilizando factorización.
- Buscamos dos números que sumados den 1 y multiplicados sean -132.
- Un truco para simplificar la búsqueda de los números consiste en empezar buscando dos números que multiplicados sean igual a -132.
- Otro truco que nos ayuda a simplificar la búsqueda consiste en observar que el coeficiente del término lineal es positivo, lo cual indica que el mayor de los dos números es positivo.
- Esos números son 12 y -11:

$$\begin{aligned} n^2+n-132 &= 0 \\ (n-11)(n+12) &= 0 \end{aligned}$$

- Ahora vemos que el producto de dos números es cero. Esto implica que uno de ellos debe ser cero.
- *Primer caso:* $n-11=0 \qquad \Rightarrow \qquad n=11.$
- Obviamente n, que representa el número de amigos que acordó comprar el boleto de la rifa, no puede ser negativo, que es precisamente el resultado que obtenemos en el siguiente caso:
- *Segundo caso:* $n+12=0 \qquad \Rightarrow \qquad n=-12.$
- Ahora sabemos que $n=11$, pero no nos preguntaron cuántos amigos decidieron cooperar para comprar el boleto, sino cuántos cooperaron, y eso incluye al papá de Adán.
- Entonces, la solución del problema es $n+1=11+1=12$ personas cooperaron.
- **Segundo Método.**
- Aquí utilizamos la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado:

$$\begin{aligned} n^2+n-132 &= 0 \\ n &= \frac{-1\pm\sqrt{1-4(1)(-132)}}{2(1)} \\ &= \frac{-1\pm\sqrt{1+528}}{2} \\ &= \frac{-1\pm\sqrt{529}}{2} \\ &= \frac{-1\pm 23}{2} \end{aligned}$$

- Y ahora encontramos las raíces de la ecuación:

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{-1+23}{2}=\frac{22}{2}=11 \\ n_2 &= \frac{-1-23}{2}=\frac{-24}{2}=-12 \end{aligned}$$

- De nuevo, el valor de n debe ser positivo por las condiciones del problema, así que $n+1=12$ es el valor que buscamos.
- Observa que como en este caso la ecuación no incluye la variable x, sino n, la fórmula general se escribe como:
$$n=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
- **Tercer Método**
- Es importante notar del problema que n debe ser un número entero, porque no es posible que 7.5 personas, por ejemplo, acuerden cooperar para comprar un boleto.
- Ahora observa que $n(n+1)$ es el producto de dos números consecutivos, y que este producto es un poco mayor que 100.
- Podemos fácilmente probar valores cercanos, pero mayores a 10 y así encontrar la solución de la ecuación.
- Si $n=11$, entonces, $n+1=12$ y $11\times12=132$.
- Esto indica que si $n=11$ era el número de amigos que acordaron comprar el boleto y eran en total $n+1=12$ cuando el papá de Adán se unió al equipo.
- **Tarea:**
- Graficar la función y obtener una aproximación de las raíces, aunque ya las conoces.
- **Además:** Se te queda como ejercicio verificar que las raíces de la ecuación cuadrática $n^2+n-132=0$, satisfacen la ecuación fraccionaria que obtuvimos del problema:
$$\frac{1\,320}{n}-\frac{1\,320}{n+1}=10$$
Esto mostrará que las ecuaciones son equivalentes. Es decir, tienen las mismas soluciones, y por tanto, representan las mismas condiciones, que son las impuestas por el problema textual.

Reto 1

Resuelve:
$$ab\,x^2-a^2x=b^2x-ab$$

Ejercicios 4.1 Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por el método algebraico más conveniente.

1) $36x^2-108x+81=0$ **R.** $x=\frac{3}{2}$

2) $x^2+2x+1=0$ **R.** $x=-1$

3) $x^2-6x+9=0$ **R.** $x=3$

4) $8x^2-36x+4=0$ **R.** $x=\frac{2}{9}$

5) $64x^2+128x+64=0$ **R.** $x=-1$

6) $49x^2+56x+16=0$ **R.** $x=-\frac{4}{7}$

7) $8x^2+108x+36=0$ **R.** $x=-\frac{2}{3}$

8) $16x^2+24x+9=0$ **R.** $x=-\frac{3}{4}$

9) $25x^2+80x+64=0$ **R.** $x=-\frac{8}{5}$

10) $25x^2+50x+25=0$ **R.** $x=-1$

11) $25x^2-50x+25=0$ **R.** $x=1$

12) $4x^2+8x+4=0$ **R.** $x=-1$

13) $9x^2-48x+64=0$ **R.** $x=\frac{8}{3}$

14) $x^2+8x+16=0$ **R.** $x=-4$

15) $4x^2-32x+64=0$ **R.** $x=4$

16) $8x^2-18x+1=0$ **R.** $x=\frac{1}{9}$

17) $x^2-18x+81=0$ **R.** $x=9$

18) $64x^2+64x+16=0$ **R.** $x=-\frac{1}{2}$

19) $36x^2+24x+4=0$ **R.** $x=-\frac{1}{3}$

20) $64x^2-96x+36=0$ **R.** $x=\frac{3}{4}$

21) $8x^2+18x+1=0$ **R.** $x=-\frac{1}{9}$

22) $9x^2-48x+64=0$ **R.** $x=\frac{8}{3}$

23) $x^2-14x+49=0$ **R.** $x=7$

24) $9x^2-36x+36=0$ **R.** $x=2$

25) $8x^2-144x+64=0$ **R.** $x=\frac{8}{9}$

26) $-2x^2+23x-45=0$ **R.** $x_1=-\frac{5}{2}, x_2=-\frac{9}{1}$

27) $-8x^2+10x+25=0$ **R.** $x_1=-\frac{5}{2}, x_2=\frac{5}{4}$

28) $32x^2+28x+5=0$ **R.** $x_1=\frac{5}{8}, x_2=\frac{1}{4}$

29) $-8x^2-28x+16=0$ **R.** $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=4$

30) $32x^2+4x-45=0$ **R.** $x_1=\frac{5}{4}, x_2=-\frac{9}{8}$

31) $4x^2+16x+12=0$ **R.** $x_1=3, x_2=1$

32) $42x^2+43x+6=0$ **R.** $x_1=\frac{6}{7}, x_2=\frac{1}{6}$

33) $-20x^2+49x-30=0$ **R.** $x_1=-\frac{6}{5}, x_2=-\frac{5}{4}$

34) $14x^2+32x+18=0$ **R.** $x_1=1, x_2=\frac{9}{7}$

35) $9x^2+12x-12=0$ **R.** $x_1=2, x_2=-\frac{2}{3}$

36) $-49x^2+91x-36=0$ **R.** $x_1=-\frac{4}{7}, x_2=-\frac{9}{7}$

37) $-54x^2+18x+12=0$ **R.** $x_1=-\frac{2}{3}, x_2=\frac{1}{3}$

38) $4x^2+4x-15=0$ **R.** $x_1=\frac{5}{2}, x_2=-\frac{3}{2}$

39) $-54x^2+117x-63=0$ **R.** $x_1=-1, x_2=-\frac{7}{6}$

40) $-14x^2+9x+8=0$ **R.** $x_1=-\frac{8}{7}, x_2=\frac{1}{2}$

41) $-56x^2+114x-54=0$ **R.** $x_1=-\frac{9}{7}, x_2=-\frac{3}{4}$

42) $-40x^2+39x+40=0$ **R.** $x_1=-\frac{8}{5}, x_2=\frac{5}{8}$

43) $9x^2+50x+25=0$ **R.** $x_1=\frac{5}{1}, x_2=\frac{5}{9}$

44) $-4x^2+14x-12=0$ **R.** $x_1=-2, x_2=-\frac{3}{2}$

45) $-14x^2-17x+45=0$ **R.** $x_1=-\frac{9}{7}, x_2=\frac{5}{2}$

46) $2x^2-18x+4=0$ $x=\dfrac{-18\pm\sqrt{292}}{4}$

47) $7x^2-x+8=0$ $x=\dfrac{-1\pm i\sqrt{223}}{14}$

48) $7x^2-5x+6=0$ $x=\dfrac{-5\pm i\sqrt{143}}{14}$

49) $9x^2-x+3=0$ $x=\dfrac{-1\pm i\sqrt{107}}{18}$

50) $11x^2+8=0$ $x=\pm i\sqrt{8}$

51) $5x^2-13x+5=0$ $x=\dfrac{-13\pm\sqrt{69}}{10}$

52) $8x^2-11x+8=0$ $x=\dfrac{-11\pm i\sqrt{135}}{16}$

53) $10x^2-2x+1=0$ $x=\dfrac{-2\pm i\sqrt{36}}{20}$

54) $11x^2 - 7x + 1 = 0$ $x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{5}}{22}$

55) $x^2 - 7x = 0$ $x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49}}{2}$

56) $10x^2 - 2x + 6 = 0$ $x = \dfrac{-2 \pm i\sqrt{236}}{20}$

57) $x^2 - 9x + 6 = 0$ $x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{57}}{2}$

58) $3x^2 - 12x + 3 = 0$ $x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{108}}{6}$

59) $3x^2 - 9x + 3 = 0$ $x = \dfrac{-9 \pm \sqrt{45}}{6}$

60) $3x^2 - 18x + 9 = 0$ $x = \dfrac{-18 \pm \sqrt{216}}{6}$

61) $8x^2 - 5x + 4 = 0$ $x = \dfrac{-5 \pm i\sqrt{103}}{16}$

62) $10x^2 - 4x + 2 = 0$ $x = \dfrac{-4 \pm i\sqrt{64}}{20}$

63) $x^2 - 19x + 6 = 0$ $x = \dfrac{-19 \pm \sqrt{337}}{2}$

64) $8x^2 - 15x + 1 = 0$ $x = \dfrac{-15 \pm \sqrt{193}}{16}$

65) $3x^2 - 14x + 5 = 0$ $x = \dfrac{-14 \pm \sqrt{136}}{6}$

66) $11x^2 - 3x + 8 = 0$ $x = \dfrac{-3 \pm i\sqrt{343}}{22}$

67) $4x^2 - 7x + 6 = 0$ $x = \dfrac{-7 \pm i\sqrt{47}}{8}$

68) $x^2 - 13x + 9 = 0$ $x = \dfrac{-13 \pm \sqrt{133}}{2}$

69) $x^2 - 8x + 8 = 0$ $x = \dfrac{-8 \pm \sqrt{32}}{2}$

70) $x^2 - 5x + 3 = 0$ $x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$

71) $4x^2 - 3x + 4 = 0$ $x = \dfrac{-3 \pm i\sqrt{55}}{8}$

72) $9x^2 - 18x + 8 = 0$ $x = \dfrac{-18 \pm \sqrt{36}}{18}$

73) $4x^2 - 13x + 5 = 0$ $x = \dfrac{-13 \pm \sqrt{89}}{8}$

74) $7x^2 - 19x + 4 = 0$ $x = \dfrac{-19 \pm \sqrt{249}}{14}$

75) $3x^2 - 16x + 2 = 0$ $\quad x = \dfrac{-16 \pm \sqrt{232}}{6}$

76) $11x^2 - 5x + 2 = 0$ $\quad x = \dfrac{-5 \pm i\sqrt{63}}{22}$

77) $4x^2 - 14x + 2 = 0$ $\quad x = \dfrac{-14 \pm \sqrt{164}}{8}$

78) $x^2 + 3 = 0$ $\quad x = \pm i\sqrt{3}$

79) $x^2 - 6x + 2 = 0$ $\quad x = \dfrac{-6 \pm \sqrt{28}}{2}$

80) $10x^2 - 15x + 6 = 0$ $\quad x = \dfrac{-15 \pm i\sqrt{15}}{20}$

81) $3x^2 - 12x + 1 = 0$ $\quad x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{132}}{6}$

82) $2x^2 - 14x + 5 = 0$ $\quad x = \dfrac{-14 \pm \sqrt{156}}{4}$

83) $11x^2 - 9x + 6 = 0$ $\quad x = \dfrac{-9 \pm i\sqrt{183}}{22}$

84) $10x^2 - 3x + 2 = 0$ $\quad x = \dfrac{-3 \pm i\sqrt{71}}{20}$

85) $11x^2 - x + 4 = 0$ $\quad x = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{175}}{22}$

86) $5x^2 - 13x + 3 = 0$ $\quad x = \dfrac{-13 \pm \sqrt{109}}{10}$

87) $2x^2 - 12x + 3 = 0$ $\quad x = \dfrac{-12 \pm \sqrt{120}}{4}$

88) $3x^2 - 19x + 6 = 0$ $\quad x = \dfrac{-19 \pm \sqrt{289}}{6}$

89) $9x^2 - 7x + 8 = 0$ $\quad x = \dfrac{-7 \pm i\sqrt{239}}{18}$

90) $10x^2 - 17x + 4 = 0$ $\quad x = \dfrac{-17 \pm \sqrt{129}}{20}$

91) $3x^2 - 6x + 7 = 0$ $\quad x = \dfrac{-6 \pm i\sqrt{48}}{6}$

92) $9x^2 - 11x + 6 = 0$ $\quad x = \dfrac{-11 \pm i\sqrt{95}}{18}$

93) En un hotel acaban de construir una piscina que tiene 5 m de ancho por 22 m de largo. Se desea agregar, alrededor de la piscina, por seguridad, una acera de concreto con un ancho constante para que la gente no resbale al caminar alrededor de la misma. El área de la piscina con su acera de concreto es de 200 m^2. ¿Cuál es el ancho de la acera que se desea agregar? 1.5 metros.

94) Un artesano fabrica azulejos a mano. Las medidas originales son de 4 pulgadas de largo y 4 pulgadas de ancho (cuadrados). Desea agregar una orilla de anchra constante para incrustar piedras de río, pero que el área total de cada azulejo sea de 36 pulgadas cuadradas. ¿Cuál debe ser el ancho de ese nuevo acabado? **Sugerencia:** *Intenta resolverlo mentalmente. Después revisa tu resultado modelando la situación matemáticamente.* 1 pulgada.

4.2 Desigualdades de una variable

Nosotros ya sabemos que podemos ordenar los números de un conjunto, bien de mayor a menor, bien de menor a mayor.

Este orden está definido por la definición de las desigualdades siguientes.

4.2.1 Definicion

Desigualdad

Una desigualdad es una expresión de la forma:

$$a > b$$

que se lee «el número a es mayor que el número b», y esto es verdadero siempre que la diferencia $a-b$ resulta ser un número positivo. Otra desigualdad es:

$$a < b$$

que se lee «el número a es menor que el número b», y es verdadera siempre que la diferencia $a-b$ es un número negativo.

Definición 1

Indica *CIERTO* o *FALSO* para cada una de las desiguadades.

Ejemplo 1

- $2 > 1$
  Para que sea verdadero, se requiere que $2-1$ sea positivo. Y $2-1=1$, luego es *VERDADERO*.

- $2 < 5$
  Esto es *VERDADERO*, porque $2-5$ es negativo.

- $10 > 20$
  Esto es *FALSO*, porque $10-20=-10$ es negativo.

- $10 < 20$
  Es *VERDADERO*, porque $10-20=-10$ es negativo

Cuando incluimos una variable en la desigualdad, podemos preguntarnos: «*¿para qué valores de la variable la desigualdad resulta ser verdadera?*»

Solución de una desigualdad

La solución de una desigualdad es el conjunto de todos los valores de la(s) variable(s) que hacen que la desigualdad sea verdadera.

Definición 2

1. Propiedades de las desigualdades

Así como la igualdad tiene algunas propiedades, la desigualdad también tiene algunas propiedades que nos facilitan su tratamiento algebraico para la solución de problemas.

Definición 3

PROPIEDADES DE LAS DESIGUALDADES

Suponga que se cumple $a > b$, $x > y$, y sea c cualquier número real (constante). Entonces, también se cumplen:

i) $a + c > b + c$.

ii) $\frac{a}{c} > \frac{d}{c}$, *supuesto que* $c > 0$.

iii) $a \cdot c > b \cdot c$, *supuesto que* $c > 0$.

iv) $a + x > b + y$.

v) $\frac{a}{c} < \frac{d}{c}$, *supuesto que* $c < 0$.

vi) $a \cdot c < b \cdot c$, *supuesto que* $c < 0$.

Ejemplo 2

Indica si se siguen cumpliendo cada una de las desigualdades, dado que la original es cierta.

- Considerando que $x > 2$, entonces,
- $x + 7 > 9$, se cumple, por la propiedad (i).
- También, $\frac{x}{3} > \frac{2}{3}$, se cumple, porque $3 > 0$. (prop. ii)
- Igualmente, $5x > 10$, se cumple porque $5 > 0$ (prop. iii).
- Dado que $5 > 3$, se cumple: $x + 5 > 5$ por la propiedad (iv).
- Como $-3 < 0$, si $x > 2$, se sigue que: $-\frac{x}{3} < -\frac{2}{3}$ por la propiedad (v).
- De manera semejante, se cumple: $-3x < -6$, por la propiedad (vi).

Como puedes ver, las propiedades de las desigualdades son prácticamente las mismas que las propiedades de la igualdad, con la diferencia de que cuando multiplicamos o dividimos por un número negativo el sentido de la desigualdad cambia.

Siempre debes tener eso en cuenta.

Definición 4

TRICOTOMÍA

Dados dos números reales a, b satisfacen una y solamente una de las siguientes condiciones:

$$a < b \qquad a = b \qquad a > b$$

En palabras, la tricotomía nos indica que entre Aarón y Benjamín, bien Aarón es menor que Benjamín, bien ambos tienen la misma edad, bien Aarón es mayor que Benjamín. No pueden ocurrir dos o tres de esas condiciones simultáneamente.

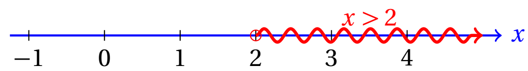
En otras palabras, la tricotomía me dice: « *o tengo tu edad, o eres mayor que yo, o eres menor que yo.*»

Es imposible que se satisfagan dos de esas condiciones al mismo tiempo y mucho menos las tres.

4.2.2 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

En matemáticas muchas veces nos ayuda a entender mejor un concepto conocer una interpretación geométrica del mismo.

Supongamos que $x > 2$. Geométricamente tenemos:



Ahora elegimos un número que satisfaga esa desigualdad, digamos $x = 3$. Entonces, $3 > 2$ se satisface.

Como puedes ver, la parte que se ha marcado con la linea en zig-zag incluye al punto $x = 3$, porque este punto satisface la desigualdad.

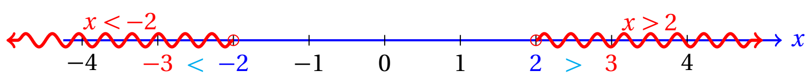
Sin embargo el punto $x = 2$ **no** está incluido en este conjunto porque por tricotomía, $2 \not> 2$. Luego, 2 no tasisface la desigualdad $x > 2$.

La propiedad (vi) también tiene una interpretación geométrica.

Si multiplicamos la desigualdad por un número negativo, cualquiera, digamos -1, entonces el sentido de la desigualdad cambia: $-3 < -2$.

Observa que los valores de la desigualdad: $x < -2$ son el reflejo respecto del origen (del eje x) de la desigualdad $x > 2$.

Geométricamente:



Observa que el círculo que indica el inicio de la solución de la desigualdad está vacío. Esto se justifica con la tricotomía: dado que $2 \not> 2$, 2 no satisface la desigualdad $x > 2$.

4.2.3 Desigualdades con una incógnita

Nosotros utilizaremos las propiedades de las desigualdades para expresarlas de la manera más simple posible.

Resuelve la desigualdad:

$$5x - 1 > 24$$

Ejemplo 1

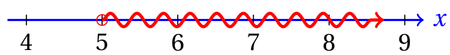
- Empezamos sumando 1 en ambos lados de la desigualdad.
- Este paso se justifica con la propiedad (i).

$$\begin{aligned} 5x - 1 + 1 &> 24 + 1 \\ 5x &> 25 \end{aligned}$$

- Ahora podemos dividir entre 5 ambos lados de la desigualdad.
- Dado que $5 > 0$ el sentido de la desigualdad no cambia.

$$\begin{aligned} \frac{5x}{5} &> \frac{25}{5} \\ x &> 5 \end{aligned}$$

- Entonces la desigualdad: $5x - 1 > 24$ expresada en su forma más simple es equivalente a la desigualdad: $x > 5$.
- Geométricamente, tenemos:



- Otra forma equivalente de escribir este resultado es: $x \in (5, \infty)$.

De nuevo, el círculo al inicio de la desigualdad está vacío indicando que 5 no satisface la desigualdad. Esto es así porque $5 \ngtr 5$. Sino $5 = 5$.

Definición 1

NOTACIÓN DE INTERVALOS

Los intervalos con límites en a y b, se pueden expresar como:

i) (a, b) que incluye a todos los valores entre a y b, excluyendo a los límites.

ii) $[a, b)$ que incluye a todos los valoes entre a y b, incluyendo a a pero excluyendo a b.

iii) (a, b) que incluye a todos los valoes entre a y b, excluyendo a a pero incluyendo a b.

iv) $[a, b]$ que incluye a todos los valoes entre a y b, incluyendo a a al igual que a b.

De manera semejante, en notación de desigualdades podemos reescribir los intervalos como sigue:

Comentario

Equivalencia entre la notación de intervalos y de desigualdades

En cada uno de los siguientes intervalos están incluidos además, todos los valores entre a y b.

i) $(a, b) = \{x | a < x < b\}$ $\Rightarrow$ ni a ni b están en el conjunto.

ii) $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$ $\Rightarrow$ a sí está en el conjunto, pero b no.

iii) $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$ $\Rightarrow$ b sí está en el conjunto, pero a no.

iv) $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$ $\Rightarrow$ tanto a como b están en el conjunto.

Observa que en la desigualdad $a \leq x$, en palabras, a es menor *o igual* a x, por eso $x = a$ satisface esa igualdad. Porque a puede ser igual a x, y por las propiedades de la igualdad, x puede ser igual a a.

Ejemplo 2

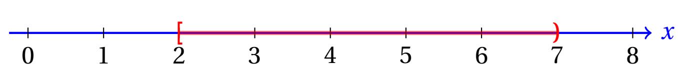
Interpreta geométricamente la siguiente desigualdad

$$2 \leq x < 7$$

- Observa que esta desigualdad está *compuesta* de dos desigualdades:

$$2 \leq x \qquad \text{y} \qquad x < 7$$

- Podemos interpretar la desigualdad $2 \leq x < 7$ como el conjunto de todos los números que son menores a 7, pero mayores o iguales a 2.
- Interpretar gemétricamente esto es muy sencillo:



- Observa en la soución geométrica que hemos utilizado un corchete ([) para indicar que $x = 2$ satisface la desigualdad.

- También se ha utilizado un paréntesis al final del intervalo ()) para indicar que $x = 7$ **no** satisface la desigualdad.
- Como debes suponer, esto viene de la notación de intervalos.
- Observa que la solución es equivalente a la intersección de las soluciones de las dos desigualdades:

$$2 \leq x \qquad \Rightarrow \qquad x \geq 2 \qquad \text{y} \qquad x < 7$$

como era de esperarse.

Ejemplo 3

Resuelve algebraicamente la siguiente desigualdad:

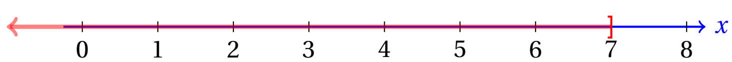
$$3x - 1 \leq 20$$

muestra la solución en notación de intervalos y da una interpretación geométrica del resultado.

- Empezamos resolviendo la desigualdad:

$$\begin{aligned} 3x &\leq 21 \\ x &\leq 7 \end{aligned}$$

- Observa que el 7 sí está incluido en el conjunto solución.
- En notación de intervalos este resultado se expresa como: $(-\infty, 7]$.
- Geométricamente tenemos la siguiente situación:



Ejemplo 4

Itzel desea contratar un medio de transporte para un evento que está organizando. Un taxista le cobra \$25.00 pesos por contrato, más \$1.40 pesos por kilómetro recorrido. Por otra parte, puede alquilar una suburban todo un día por \$750.00 pesos. La suburban recorre en promedio 11 kilómetros por litro de gasolina y cada litro cuesta \$7.50 pesos. ¿A partir de cuántos kilómetros le sale más barato contratar la suburban?

- Primero vamos a calcular cuánto le cuesta cada kilómetro recorrido en la suburban.
- Cada litro de gasolina le permite recorrer 11 kilómetros en promedio y el litro de gasolina le cuesta \$7.50.
- Usando una regla de tres encontramos que un kilómetro recorrido le cuesta \$0.68 pesos aproximadamente.
- Entonces, el costo de recorrer x kilómetros en el taxi es:

$$C_t = \underbrace{25}_{\text{contrato}} + \underbrace{1.40\,x}_{\text{km recorridos}}$$

- Por otra parte, el costo de recorrer x kilómetros en la suburban es:

$$C_s = \underbrace{750}_{\text{alquiler}} + \underbrace{0.68\,x}_{\text{gasolina}}$$

- Queremos calcular los kilómetros que debe recorrer para que el costo de recorrer esa distancia en la suburban sea menor que el costo en el taxi:

$$\begin{array}{rcl}
C_s & < & C_t \\
750 + 0.68\,x & < & 25 + 1.40\,x \\
750 - 25 & < & 1.40\,x - 0.68\,x \\
725 & < & 0.72\,x \\
\dfrac{725}{0.72} & < & x \\
1006.94 < x & \Rightarrow & x > 1006.94
\end{array}$$

- La última desigualdad nos dice que la solución de: $C_s < C_t$ es: $x > 1006.94$.
- En palabras, si recorre más de 1006.94 kilómetros, alquilar la suburban le sale más barato que contratar el taxi.
- Es decir, si recorre menos de 1006.94 kilómetros, le conviene mejor pagar el taxi.

Ejemplo 5

Pablo contrató un servicio de buffet para el día de su boda. Cada platillo cuesta \$225.00 pesos y le hacen un descuento de \$10.00 pesos en todos los platillos después de los 200 platillos servidos. El salón donde se hará la fiesta tiene capacidad para 350 personas. ¿Cuántos platillos debe adquirir si asignó \$50 000.00 pesos para la comida de su boda?

- Pablo asignó \$50 000.00 pesos para la comida.
- Algebraicamente el costo cada uno de los platillos es:

$$C = \begin{cases} 225 & \text{si } x \leq 200 \\ 215 & \text{si } x > 200 \end{cases}$$

- Por los primeros 200 platillos pagaría:

$$(225)(200) = 45\,000 \text{ pesos}$$

- Pero si solicita un platillo más, cada platillo extra costará \$10.00 pesos menos.
- Entonces, por 201 platillos debería pagar:

$$\underbrace{(225)(200)}_{\text{primeros 200}} + \underbrace{(1)(215)}_{\text{último}} = 45\,000 + 215 = 45\,215 \text{ pesos}$$

- Suponiendo que le lleguen más de 200 invitados y todos pidan un platillo, por cada platillo, después de los primeros 200 debería pagar 215.

- Nosotros queremos que el importe sea menor o igual a la cantidad asignada a la comida de la fiesta:

$$\begin{aligned}
\underbrace{200\cdot(225)}_{\text{platillos de \$225}} + \underbrace{215(x-200)}_{\text{platillos de \$215}} &\leq 50\,000\\
215(x-200) &\leq 50\,000 - 200\cdot(225)\\
215\,x - 43\,000 &\leq 5\,000\\
215\,x &\leq 48\,000\\
x &\leq \frac{48\,000}{215} \approx 223.2558
\end{aligned}$$

- Como el número de platillos debe ser entero, podrá pagar 223 platillos.
- En total pagará: $(200)(225)+(23)(215) = 49\,945$ pesos, y le sobran \$55.00 pesos de lo presupuestado para la comida.

Ejercicios 4.2

Resuelve cada una de las siguientes desigualdades. Para cada una muestra su solución en notación de intervalos y represéntala geométricamente.

1) $3\,x+1>22$ $x>7$

2) $5\,x-2<18$ $x<4$

3) $-2\,x+2>12$ $x<-5$

4) $7\,x+1\geq 50$ $x\geq 7$

5) $-5\,x+4\leq 74$ $x\leq -14$

6) $4\,x+5>33$ $x>7$

7) $11\,x-13\leq 42$ $x\leq 5$

8) $7\,x+2\geq 79$ $x\geq 11$

9) $3\,x-12<51$ $x<21$

10) $9\,x+13\leq 166$ $x\leq 17$

11) $11\,x+13\geq 222$ $x\geq 19$

12) $7\,x+17<80$ $x<9$

Instrucciones

Muestra la solución geométrica de cada una de las siguientes desigualdades.

13) $-2<x<2$

14) $0<x<5$

15) $3\leq<\leq 7$

16) $3<x\leq 9$

17) $5\leq x<12$

18) $-5\leq x\leq 6$

19) $-12 < x \leq 21$

20) $-3 \leq x \leq 7$

21) $21 \leq x < 31$

22) $-7 < x \leq 14$

23) $x \geq 3$, junto con: $x \leq 5$

24) $x \leq 7$, junto con: $x \geq -2$

25) $x \geq 7$, junto con: $x \leq 1$

4.3 Desigualdades de dos variables

Ahora vamos a estudiar un caso más general.

Cuando graficamos la ecuación:

$$x + y = 10$$

obtenemos una recta en al plano.

Cada punto que está sobre la recta satisface la ecuación. Es decir, si sumamos las coordenadas del punto obtenemos 10.

Ningún otro punto del plano satisface esa condición.

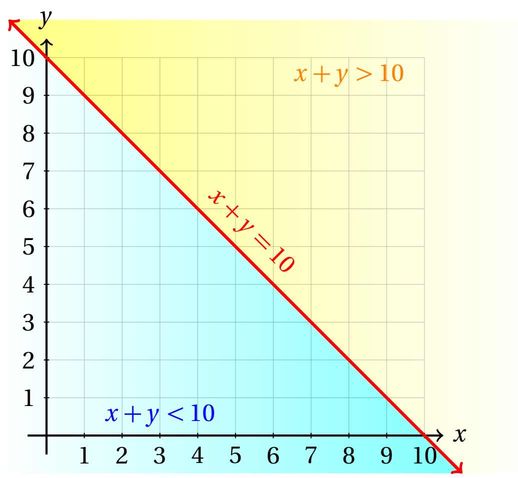
Entonces, por tricotomía, bien $x + y > 10$, bien $x + y < 10$ para los demás puntos del plano.

Vamos a tomar el origen: $(0,0)$ y vamos a sustituir los valores en cada una de las dos ecuaciones. Obviamente, satisface la desigualdad:

$$x + y < 10$$

Observa que si vamos cambiando una coordenada, digamos y dejando constante la otra (x), antes de que cambie el sentido de la desigualdad debe cumplirse la igualdad.

Esto nos obliga a concluir que la recta divide el plano cartesiano en dos regiones, cada una de las cuales satisface una desigualdad.



Cualquier punto que elijamos que esté a la derecha de la recta $x+y = 10$ satisface la desigualdad $x+y > 10$.

De manera semejante, cualquier punto de la región a la izquierda de la recta $x + y = 10$ satisface la desigualdad $x + y < 10$.

Geométricamente podemos pensar que la recta $x + y = 10$ es la frontera entre las regiones $x + y < 10$, y $x + y > 10$.

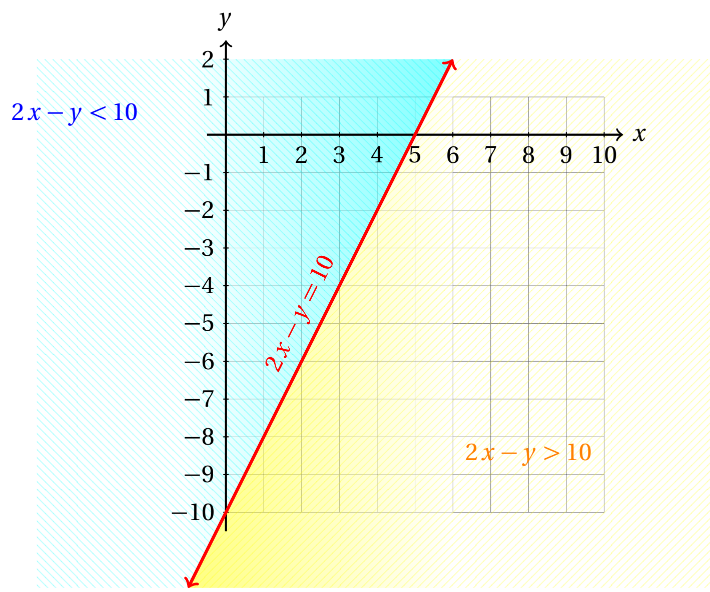
Representa la región del plano cartesiano cuyos puntos satisfacen la desigualdad:

$$2x - y < 10$$

Ejemplo 6

- Empezamos considerando la ecuación $2x - y = 10$.
- Su gráfica es una recta con pendiente 2 y que pasa por el punto $B(0,10)$.

- Esta recta es la frontera entre las desigualdades $2x - y < 10$, y $2x - y > 10$.
- Al sustituir las coordenadas del origen en la desigualdad dada en el problema vemos que éste punto la satisface.
- Entonces, las regiones quedan:



- Si sutituimos las coordenadas de un punto cualquiera que se encuentre en la región a la izquierda de la recta $2x - y = 10$ en la desigualdad $2x - y < 10$, la desigualdad se cumple.
- Verifica esto para al menos cinco puntos de esa región.
- De manera semejante, si sustituimos las coordenadas de cualquiera de los puntos que se encuentran a la derecha de la recta $2x - y = 10$ en la desigualdad $2x - y > 10$, la desigualdad se cumple.
- Verifica esto para al menos diez puntos de esa región.

Ejemplo 7

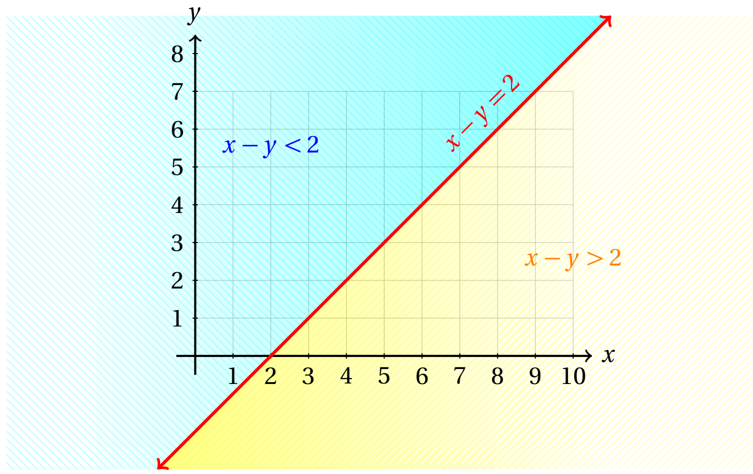
Muestra en el plano cartesiano la región que es solución de la desigualdad:

$$x - y > 2$$

- De nuevo, dado que la recta $x - y = 2$ no pasa por el origen, sustituimos $x = 0$, $y = 0$ en la desigualdad para ver si las satisface.
- Dado que $0 \not> 2$, la región en la cual se encuentra el origen no es la solución de nuestra desigualdad.
- La otra región es la solución.
- Vamos a verificarlo sustituyendo un punto que se encuentre allí.
- Elegimos el punto $P(10, 2)$:

$$10 - 2 > 2$$

- Como la desigualdad se cumple para ese punto, la región a la derecha de la recta es la solución de la desigualdad:



Recuerda que la recta: $ax+by=c$, siempre divide al plano cartesiano en dos regiones.

Una de ellas es la solución de la desigualdad:

$$ax+by>c$$

y la otra región es la solución de la desigualdad:

$$ax+by<c$$

Para verificar cuál región es solución de cada desigualdad, basta sustituir las coordenadas de cualquiera de los puntos que esté en alguna de las regiones (por consiguiente, que no esté sobre la recta).

Las coordenadas del punto que satisfaga una desigualdad nos indicarán que ese punto satisface la desigualdad, y por tanto, todos los puntos de esa región.

Por otra parte, si no satisface la desigualdad, ese punto satisface a la otra desigualdad, al igual que todos los puntos de esa región.

Ejemplo 8

Muestra la región del plano cartesiano que es solución de la siguiente desigualdad:

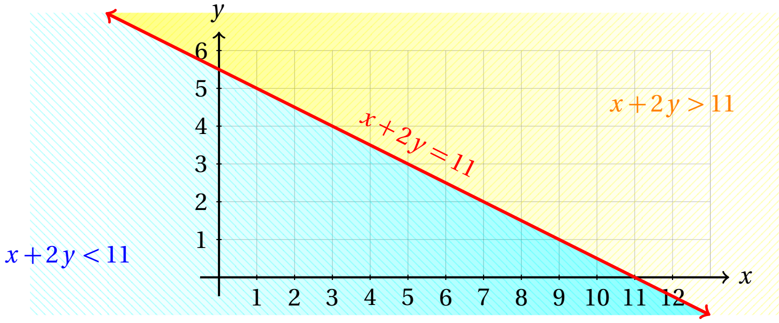
$$x+2y>11$$

- Al sustituir las coordenadas del origen vemos que la desigualdad no se satisface.

- Entonces, la región a la cual pertenece el origen satisface la desigualdad:

$$x+2y<11$$

- La otra región es la región que nosotros buscamos:



- Se te queda como ejercicio verificar que los puntos: $A(10,1)$, $B(5,5)$, $C(0,6)$ y $D(12,0)$ satisfacen la desigualdad: $x+2y>11$.
- Igualmente, verifica que los puntos $P(2,2)$, $Q(4,3)$ y $R(7,1)$ no la satisfacen.

De manera semejante a las ecuaciones lineales, es posible modelar problemas a través de las desigualdades.

Primero tenemos que definir qué representa cada variable y después aplicar las propiedades algebraicas de las desigualdades para encontrar la solución.

La diferencia con las ecuaciones consiste en que la representación geométrica de una ecuación es una recta, mientras que para la desigualdad tendremos una región del plano.

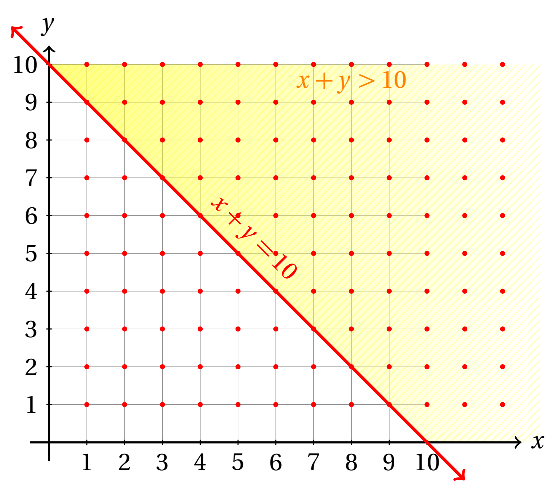
Ejemplo 9

Benjamín tiene monedas de \$2.00 y de \$5.00 pesos. Se sabe que tiene más de 10 monedas. Si x es la cantidad de monedas de \$2.00 pesos y y es la cantidad de monedas de \$5.00 pesos que él tiene, muestra la región del plano cartesiano que representa las posibles cantidades de monedas que él tiene.

- Dado que tiene más de 10 monedas, tenemos la siguiente desigualdad:

$$x+y>10$$

- En este caso, el número de monedas de \$2.00 o de \$5.00 pesos debe ser un número entero.
- Pues no tiene sentido hablar de, por ejemplo, 2.37 monedas de alguna denominación.



- Es importante enfatizar que la solución de este problema están representados por los puntos que están en el primer cuadrante, porque no es posible tener, por ejemplo, -5 monedas de \$2.00 pesos.

Si nosotros mostramos la solución de dos desigualdades diferentes en el mismo plano cartesiano tendremos una situación interesante.

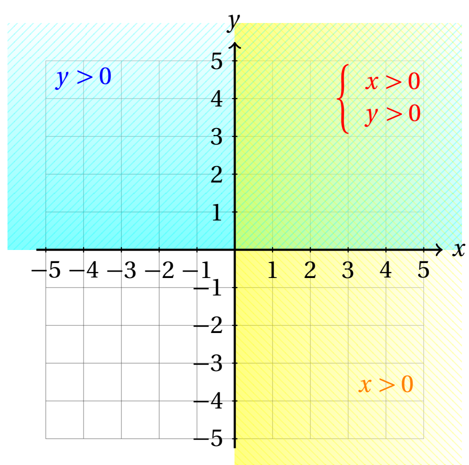
En ese caso decimos que estamos resolviendo un sistema de desigualdades.

Pues las soluciones no tienen por qué intersectarse. Es posible que las soluciones sean disjuntas. Es decir, que no existan puntos que satisfagan las dos desigualdades simultáneamente. En otras palabras, que existan puntos que satisfacen una desigualdad o la otra, pero no ambas.

La solución del sistema de desigualdades está dado por la intersección de las regiones que son solución para cada una de las desigualdades que forman el sistema.

Representa en un mismo sistema de coordenadas cartesiano el siguiente sistema de desigualdades: $x > 0$, $y > 0$. **Ejemplo 10**

- Todo punto que está en el eje y satisface $x = 0$.
- A la izquierda del eje y, $x < 0$, y a su derecha x es positivo.
- Por otra parte, todo punto que está en el eje x satisface $y = 0$.
- Los puntos que están arriba de este eje (x), satisfacen $y > 0$.
- Los puntos que están por debajo de este eje satisfacen $y < 0$.
- Entonces, geométricamente tenemos:



- La solución de ambas desigualdades corresponde al primer cuadrante del plano cartesiano.
- Esta región corresponde a la solución del sistema de desigualdades:

$$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

En la siguiente sección resolveremos sistemas de ecuaciones más interesantes que el de este ejemplo.

Ejercicios 4.3

Encuentra la región del plano cartesiano que representa la solución de cada una de las desigualdades siguientes. Utiliza los dos puntos dados para graficar la recta que obtienes al convertir a igualdad.

1) $-17x-5y\geq 191$ — $A(-13,6)$, $B(-8,-11)$
2) $-6x-3y\leq -30$ — $A(4,2)$, $B(10,-10)$
3) $-17x-5y<-31$ — $A(3,-4)$, $B(-2,13)$
4) $-x-7y\geq -40$ — $A(5,5)$, $B(-2,6)$
5) $14x-3y\geq 132$ — $A(9,-2)$, $B(12,12)$
6) $-3x-y\geq -45$ — $A(11,12)$, $B(12,9)$
7) $-7x-16y\geq -148$ — $A(12,4)$, $B(-4,11)$
8) $-11x-2y>-108$ — $A(12,-12)$, $B(8,10)$
9) $-5x-10y>100$ — $A(-2,-9)$, $B(-12,-4)$
10) $7x-4y>54$ — $A(10,4)$, $B(6,-3)$
11) $-16x-17y>59$ — $A(8,-11)$, $B(-9,5)$
12) $4x-17y\geq 54$ — $A(5,-2)$, $B(-12,-6)$
13) $-13x-3y\leq -93$ — $A(9,-8)$, $B(6,5)$
14) $-2x-y>-15$ — $A(9,-3)$, $B(11,-7)$
15) $-24x-13y\leq -132$ — $A(-1,12)$, $B(12,-12)$
16) $9x-5y\geq 23$ — $A(7,8)$, $B(-3,-10)$
17) $5x-2y>21$ — $A(9,12)$, $B(7,7)$
18) $13x-6y\geq 63$ — $A(3,-4)$, $B(9,9)$
19) $10x-12y\geq 0$ — $A(12,10)$, $B(-12,-10)$
20) $-2x-7y\leq 11$ — $A(5,-3)$, $B(-2,-1)$
21) $x-y>12$ — $A(9,-3)$, $B(8,-4)$
22) $-8x-19y\leq 12$ — $A(-11,4)$, $B(8,-4)$
23) $-3x-13y\leq 132$ — $A(8,-12)$, $B(-5,-9)$
24) $-x-8y\geq 99$ — $A(5,-13)$, $B(-3,-12)$
25) $-3x-5y\geq 34$ — $A(7,-11)$, $B(-3,-5)$
26) $-9x-y>92$ — $A(-11,7)$, $B(-9,-11)$
27) $-x-17y<-159$ — $A(6,9)$, $B(-11,10)$
28) $-x-6y\geq -23$ — $A(-1,4)$, $B(11,2)$
29) $15x-17y>-48$ — $A(-10,-6)$, $B(7,9)$

30) $16x - 9y \geq -136$ $A(-13, -8)$, $B(-4, 8)$

31) $3x - 21y > -174$ $A(12, 10)$, $B(-9, 7)$

32) $5x - 25y > -135$ $A(13, 8)$, $B(-12, 3)$

33) $-13x - 13y \geq -39$ $A(4, -1)$, $B(-9, 12)$

34) $x - 6y \geq 45$ $A(9, -6)$, $B(3, -7)$

35) $x - 3y > -23$ $A(4, 9)$, $B(7, 10)$

36) $23x - 2y \geq -206$ $A(-10, -12)$, $B(-8, 11)$

37) $-3x - 14y \leq -105$ $A(7, 6)$, $B(-7, 9)$

38) $-7x - 10y \geq 58$ $A(-4, -3)$, $B(6, -10)$

39) $10x - y \geq -34$ $A(-3, 4)$, $B(-4, -6)$

40) $5x - y \geq -57$ $A(-10, 7)$, $B(-11, 2)$

41) $6x - 7y \geq 48$ $A(-6, -12)$, $B(1, -6)$

42) $10x - y \geq -101$ $A(-9, 11)$, $B(-11, -9)$

43) $-6x - y \leq -53$ $A(9, -1)$, $B(8, 5)$

44) $-7x - 8y > -53$ $A(-5, 11)$, $B(11, -3)$

45) $9x - 3y \geq -90$ $A(-6, 12)$, $B(-12, -6)$

46) $-x - y \geq -16$ $A(8, 8)$, $B(10, 6)$

47) $-6x - y \geq 26$ $A(-4, -2)$, $B(-3, -8)$

48) $x - y \geq -12$ $A(-9, 3)$, $B(-3, 9)$

49) $7x - 4y < 71$ $A(5, -9)$, $B(9, -2)$

50) $-3x - 3y > 60$ $A(-11, -9)$, $B(-8, -12)$

51) $-7x - 4y \geq 69$ $A(-3, -12)$, $B(-11, 2)$

52) $-17x - 13y > -32$ $A(-5, 9)$, $B(8, -8)$

53) $-13x - 2y \leq -62$ $A(4, 5)$, $B(6, -8)$

54) $13x - 2y \geq 125$ $A(9, -4)$, $B(11, 9)$

55) $4x - 5y > 11$ $A(-6, -7)$, $B(-1, -3)$

4.3.1 Solución de un sistema de desigualdades

En la sección anterior tuvimos oportunidad de resolver desigualdades de dos variables.

En el último ejemplo vimos nuestro primer sistema de desigualdades, que aunque muy sencillo, nos muestra el caso más general.

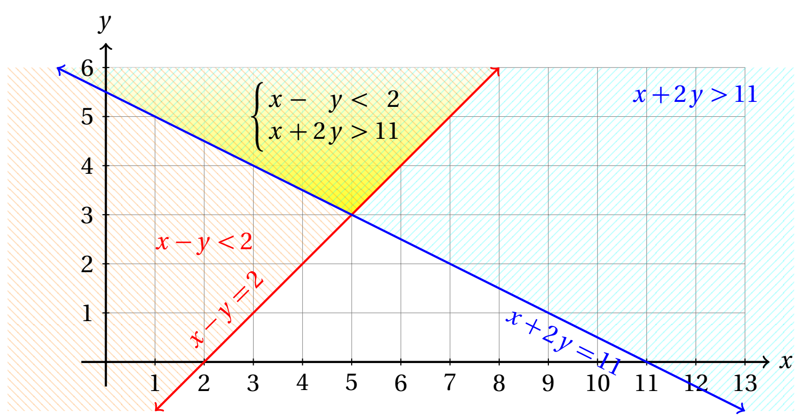
Para resolver un sistema de desigualdades vamos a resolver cada una de las desigualdades que forman al sistema en el mismo sistema de ejes coordenados. La intersección de las regiones que son solución de cada desigualdad será la solución del sistema de desigualdades.

Ejemplo 1

Resuelve el siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{aligned} x - y &< 2 \\ x + 2y &> 11 \end{aligned}$$

- Como ya resolvimos las desigualdades por separado en la sección anterior, empezamos graficando las rectas:
$$x - y = 2 \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad x + 2y = 11$$
en el mismo sistema de coordenadas.
- Después coloreamos la región solución de cada desigualdad.
- Observa que las coordenadas del origen satisfacen la primera desigualdad, pero no la segunda.



- La intersección de las regiones es la región solución del sistema de desigualdades, porque satisface a ambas desigualdades simultáneamente.

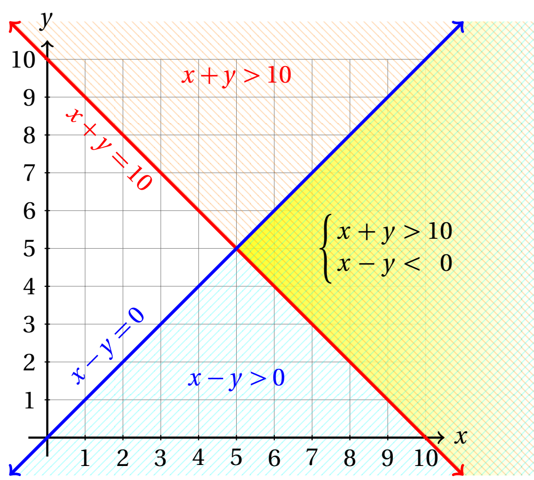
Ejemplo 2

Encuentra la región que es solución del siguiente sistema de desigualdades:

$$\begin{aligned} x + y &< 10 \\ x - y &> 0 \end{aligned}$$

- Empezamos graficando las rectas:
$$\begin{aligned} x + y &= 10 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$
en el mismo sistema de coordenadas.

- Observa que la segunda recta pasa por el origen.
- Esto significa que vamos a tener que probar la desigualdad con otro punto diferente del origen para conocer la región solución.
- Para la segunda desigualdad usamos el punto $M(5,3)$ y vemos que la satisface.
- Entonces, la solución del sistema de desigualdades se muestra en la siguiente gráfica:



Así como hemos resuelto un sistema de dos desigualdades de dos variables, podemos resolver un sistema compuesto de tres o más desigualdades.

Lo que debemos hacer es graficar las soluciones de cada una de las desigualdades que forman el sistema y encontrar la intersección de las mismas. Esa región es la solución del sistema, dado que satisface simultáneamente a todas las desigualdades.

Resuelve el siguiente sistema de desigualdades:

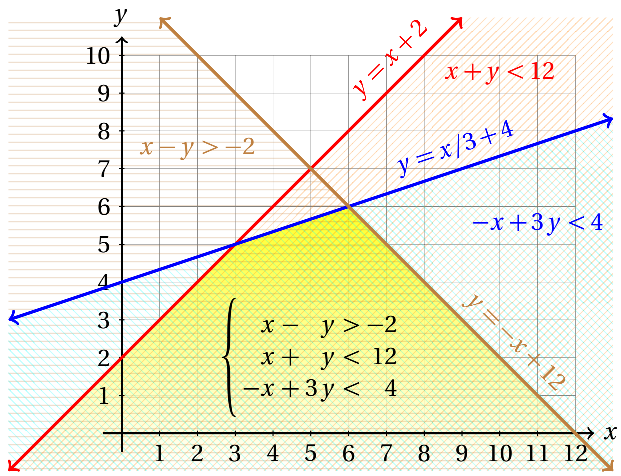
$$\begin{aligned} x - y &> -2 \\ x + y &< 12 \\ -x + 3y &< 4 \end{aligned}$$

Ejemplo 3

- Empezamos graficando las rectas que corresponden a cada desigualdad.
- Para cada recta usamos la siguiente información:

Recta:	**Punto Inicial**	**Punto Final**
$y=x+2$	$(0,2)$	$(5,7)$
$y=-x+12$	$(4,8)$	$(13,-1)$
$y=x/3+4$	$(0,4)$	$(9,7)$

- Ahora sustituimos puntos para encontrar las regiones solución de cada desigualdad.



- Y terminamos.

La desigualdad $x > 0$ geométricamente representa la región del plano cartesiano que está a la derecha del eje y.

Recuerda, sobre el eje y, $x = 0$. A la izquierda de este eje, $x < 0$, y a la derecha $x > 0$.

Igualmente, sobre el eje x, se cumple: $y = 0$. Arriba de este eje, $y > 0$, y por debajo, $y < 0$.

Estas desigualdades son muy importantes cuando vamos a resolver problemas aplicados, porque no es posible, por ejemplo construir un número negativo de ventanas.

Esta restricción nos obliga a que el valor de x o de y, dependiendo cuál de las dos variables represente la cantidad de ventanas a fabricar, sea necesariamente positivo.

Ejemplo 4

Encuentra la región solución del siguiente sistema de desigualdades:

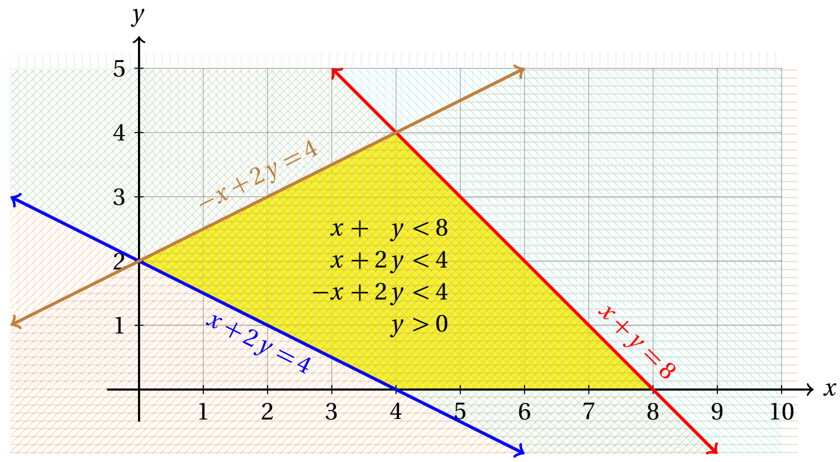
$$\begin{aligned} x + \ \ y &< 8 \\ x + 2y &< 4 \\ -x + 2y &< 4 \\ y &> 0 \end{aligned}$$

- Empezamos graficando las rectas correspondientes a cada desigualdad.

- Para eso utilizamos la información de la siguiente tabla:

Recta:	Punto Inicial	Punto Final
$x + y = 8$	$(3, 5)$	$(9, -)$
$x + 2y = 4$	$(-2, 3)$	$(6, -1)$
$-x + 2y = 4$	$(-2, 1)$	$(6, 5)$

- Ahora sí podemos sustituir las coordenadas del origen, porque ninguna de las rectas pasa por ese punto.



- Observa que la región que es solución del sistema de desigualdades incluye solamente valores positivos de y.
- Esto se debe a la última desigualdad del sistema.
- Geométricamente se traduce en que ningún punto por debajo del eje x es parte de la solución del sistema de desigualdades.
- Debes tener esto presente, particularmente cuando resolvamos problemas aplicados.

Ejemplo 5

En la carpintería «*Pepe el Toro*» se producen ventanas y puertas de madera. Las piezas tienen precios, requerimientos de material y de mano de obra como se indica en la tabla.

Pieza	**Demanda**	**Acabado** (hrs)	**Carp.** (hrs)
Ventana	Max 40/sem	2	1
Puerta	Ilimitada	1	1
Horas Disp.		100	80

Representa gráficamente las cantidades de ventanas y puertas que es posible producir en esa carpintería.

- De acuerdo a la información dada en la tabla, por cada hora que se requiere de acabado en una puerta se requieren dos para una ventana.
- Si definimos como x el número de ventanas que se producirán y y el número de puertas, tenemos que la suma de las horas de acabado en todos los productos debe ser a lo más, 100 horas:

$$2x + y \leq 100$$

- Por otra parte, ambos productos requieren igual tiempo de carpintería.

$$x + y \leq 80$$

- También hay que recordar que la demanda máxima de ventanas es de 40 por semana:

$$x \leq 40$$

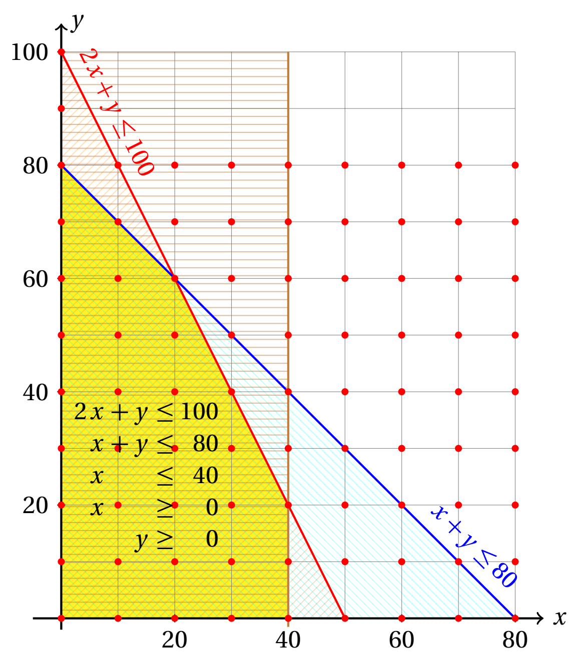
- Además, ya sabemos que no es posible producir un número negativo de ventanas o de puertas.
- Esto nos obliga a incluir también las siguientes dos desigualdades:

$$x \geq 0 \qquad\qquad y \geq 0$$

- De hecho, solamente nos es permitido producir un número entero de ventanas o de puertas.
- Entonces, debemos mostrar la solución del sistema de desigualdades:

$$\begin{aligned} 2x + y &\leq 100 \\ x + y &\leq 80 \\ x \quad &\leq 40 \\ x \quad &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

- Enseguida se muestra la región que es solución de este sistema:



- Cualquiera de los puntos dentro de la región solución es una posible producción.

Definición 1

SOLUCIÓN FACTIBLE

Cualquier punto del plano que sea solución de un sistema de desigualdades es una solución factible de ese sistema de desigualdades.

Debes tener en mente siempre que existe la posibilidad de que la intersección de las regiones solución de las desigualdades que forman el sistema que estamos estudiando tengan una intersección disjunta.

Es decir, es posible que el sistema de desigualdades no tenga solución, o en otras palabras, que el conjunto solución del sistema sea un conjunto vacío.

Ejercicios 4.3.1

Encuentra la región del plano cartesiano que representa la solución de cada una de los sistemas de desigualdades. Utiliza los dos puntos dados para graficar la región solución de cada desigualdad.

1) $-4x - y \leq 33$ — $A(-11,11)$, $B(-10,7)$
$2x - 2y \geq -44$ — $A(-8,-4)$, $B(-10,-2)$

2) $x - 6y \leq -66$ — $A(-12,9)$, $B(6,12)$
$16x - 16y < -336$ — $A(-8,-11)$, $B(-9,5)$

3) $x - 2y \geq -10$ — $A(2,6)$, $B(4,7)$
$-4x + 4y \leq 16$ — $A(-6,6)$, $B(2,2)$

4) $x - 6y < 41$ — $A(-7,-8)$, $B(-13,-9)$
$5x - 5y \leq 5$ — $A(-12,7)$, $B(-10,12)$

5) $-6x - 21y \leq 144$ — $A(-10,-4)$, $B(11,-10)$
$-3x + 3y \leq 18$ — $A(-2,-2)$, $B(11,-5)$

6) $7x - 11y \geq 100$ — $A(8,-4)$, $B(-3,-11)$
$-2x + 2y > -24$ — $A(-10,8)$, $B(-13,6)$

7) $-x - 3y \geq 12$ — $A(6,-6)$, $B(9,-7)$
$x - y \leq 12$ — $A(5,1)$, $B(-2,2)$

8) $-16x - 7y > 5$ — $A(1,-3)$, $B(-6,13)$
$3x - 3y > 12$ — $A(7,-5)$, $B(2,-2)$

9) $11x - 25y \geq 193$ — $A(13,-2)$, $B(-12,-13)$
$-13x + 13y < -195$ — $A(4,3)$, $B(8,-10)$

10) $-5x - 8y > -47$ — $A(3,4)$, $B(11,-1)$
$-8x + 8y \geq 8$ — $A(5,11)$, $B(-1,3)$

11) $-3x - y > 13$ — $A(-7,8)$, $B(-8,11)$
$20x - 20y \leq -300$ — $A(9,-9)$, $B(13,11)$

12) $3x - 4y > -47$ — $A(-9,5)$, $B(-5,8)$
$5x - 5y \geq -70$ — $A(9,-8)$, $B(-2,-3)$

13) $7x - 13y \geq -17$ — $A(5,4)$, $B(-8,-3)$
$6x - 6y > 6$ — $A(-13,-10)$, $B(-1,-4)$

14) $7x - 4y > -40$ — $A(-12,-11)$, $B(-4,3)$
$14x - 14y \leq -14$ — $A(9,-7)$, $B(3,7)$

15) $5x - 6y > -62$ — $A(2,12)$, $B(-4,7)$
$5x - 5y > -50$ — $A(3,-9)$, $B(-4,-4)$

16) $x - 16y \geq 57$ — $A(-7,-4)$, $B(9,-3)$
$-17x + 17y > 51$ — $A(-9,9)$, $B(10,-8)$

17) $4x - y \geq -35$ — $A(-7,7)$, $B(-6,11)$
$-13x + 13y > 182$ — $A(-11,3)$, $B(2,-10)$

18) $9x - 5y \geq 92$ — $A(13,5)$, $B(8,-4)$
$5x - 5y \leq 40$ — $A(-6,-3)$, $B(6,2)$

19) $16x - 15y \geq -70$ $A(5,10)$, $B(-10,-6)$
$11x - 11y \leq -55$ $A(-13,-7)$, $B(-7,4)$

20) $-18x - 5y \geq -76$ $A(7,-10)$, $B(2,8)$
$3x - 3y \geq 51$ $A(4,-10)$, $B(13,-7)$

21) $x - 9y > 41$ $A(5,-4)$, $B(-4,-5)$
$20x - 20y \geq 180$ $A(-11,-7)$, $B(-8,13)$

22) $18x - 5y \geq 148$ $A(6,-8)$, $B(11,10)$
$23x - 23y < 322$ $A(-3,-10)$, $B(10,13)$

23) $-7x - y \geq 30$ $A(-3,-9)$, $B(-4,-2)$
$3x - 3y > 18$ $A(3,5)$, $B(6,8)$

24) $7x - 13y \leq 95$ $A(8,-3)$, $B(-5,-10)$
$-9x + 9y < -99$ $A(-9,10)$, $B(-4,1)$

25) $15x - 10y < -80$ $A(2,11)$, $B(-8,-4)$
$-25x + 25y > 225$ $A(-9,13)$, $B(-12,-12)$

26) $x - y \leq 6$ $A(-3,-9)$, $B(-5,-11)$
$20x - 20y \geq 120$ $A(-11,-9)$, $B(3,11)$

27) $-21x - 20y \geq 53$ $A(-13,11)$, $B(7,-10)$
$x - y < -24$ $A(12,-10)$, $B(-5,-9)$

28) $-3x - 15y \geq -105$ $A(-10,9)$, $B(5,6)$
$-5x + 5y < 95$ $A(12,-2)$, $B(-4,-7)$

29) $-7x - 13y > 136$ $A(-12,-4)$, $B(1,-11)$
$9x - 9y \leq -72$ $A(-10,2)$, $B(-9,11)$

30) $-x - 15y < -116$ $A(-4,8)$, $B(11,7)$
$-x + y > 12$ $A(-8,7)$, $B(10,6)$

31) $x - 3y \leq 22$ $A(-8,-10)$, $B(13,-3)$
$-16x + 16y > -32$ $A(10,6)$, $B(4,-10)$
$2x - 2y \geq 8$ $A(-7,9)$, $B(-7,11)$

32) $12x - y > -118$ $A(-10,-2)$, $B(-9,10)$
$16x - y \leq 59$ $A(4,5)$, $B(3,-11)$
$-4x + 4y \geq 4$ $A(-12,2)$, $B(12,-2)$

33) $-11x - 13y \geq 73$ $A(4,-9)$, $B(-9,2)$
$17x - 17y \geq 221$ $A(-6,-13)$, $B(2,4)$
$-4x - y \geq 45$ $A(-12,3)$, $B(-8,-13)$

CRÉDITOS

Todo debe hacerse tan simple como sea posible, pero no más.	**Albert Einstein**

Este material se extrajo del libro *Matemáticas I* escrito por Efraín Soto Apolinar. La idea es compartir estos trucos para que más gente se enamore de las matemáticas, de ser posible, mucho más que el autor.

Autor: Efraín Soto Apolinar

Edición: Efraín Soto Apolinar

Composición tipográfica: Efraín Soto Apolinar

Diseño de figuras: Efraín Soto Apolinar

Productor general: Efraín Soto Apolinar

Año de edición: 2010

Año de publicación: Pendiente.

Última revisión: January 1, 2013.

Espero que estos trucos se distribuyan entre profesores de matemáticas de todos los niveles y sean divulgados entre otros profesores y sus alumnos.

Este material es de distribución gratuita.

Profesor, agradezco sus comentarios y sugerencias a la cuenta de correo electrónico:

efrain@aprendematematicas.org.mx